ISSN 2311-5149
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

Отримано: 3 березня 2014 р.

Прорецензовано: 20 березня 2014 р.

Прийнято до друку: 24 квітня 2014 р.

Заболоцький Т. М. Мінімізація value-at-risk портфеля фінансових активів як узагальнення класичної теорії портфеля / Т. М. Заболоцький // Наукові записки Національного університету «Острозька академія». Серія «Економіка» : збірник наукових праць / ред. кол. : І. Д. Пасічник, О. І. Дем'янчук. – Острог : Видавництво Національного університету «Острозька академія», 2014. – Випуск 25. – С. 207–211.

УДК: 336.761

JEL-класифікація: G11, C44

Заболоцький Тарас Миколайович,
кандидат економічних наук, старший викладач кафедри комп'ютерних технологій Львівського інституту банківської справи Університету банківської справи Національного банку України

МІНІМІЗАЦІЯ VALUE-AT-RISK ПОРТФЕЛЯ ФІНАНСОВИХ АКТИВІВ ЯК УЗАГАЛЬНЕННЯ КЛАСИЧНОЇ ТЕОРІЇ ПОРТФЕЛЯ

У роботі досліджено питання еквівалентності вибору раціональної структури портфеля фінансових активів на основі класичного методу Марковіца та методу мінімізації Value-at-Risk портфеля. Показано, що множина ефективних за Марковіцем портфелів є ширшою за множину ефективних портфелів, отриманої з задачі мінімізації VaR портфеля. Доведено, що існують ефективні за Марковіцем портфелі, які не є ефективними в умовах мінімізації VaR, а також, що всі ефективні в умовах мінімізації VaR портфелі є ефективними за Марковіцем. Тобто розглянуті підходи вибору структури портфеля фінансових активів не є еквівалентними.
Ключові слова: *портфель фінансових активів, дисперсія, Value-at-Risk (VaR), ефективний портфель, дохідність фінансового активу.*

Заболоцкий Тарас Николаевич,
кандидат экономических наук, старший преподаватель кафедры компьютерных технологий Львовского института банковского дела Университета банковского дела Национального банка Украины

МИНИМИЗАЦИЯ VALUE-AT-RISK ПОРТФЕЛЯ ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ КАК ОБОБЩЕНИЕ КЛАСИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОРТФЕЛЯ

В работе исследованы вопросы эквивалентности выбора рациональной структуры портфеля финансовых активов на основе классического метода Марковица и метода минимизации Value-at-Risk портфеля. Показано, что множество эффективных по Марковицу портфелей является шире множества эффективных портфелей, полученного из задачи минимизации VaR портфеля. Доказано, что существуют эффективные по Марковицу портфели, которые не являются эффективными в условиях минимизации VaR, а также, что все эффективные в условиях минимизации VaR портфели есть эффективными по Марковицу. То есть рассмотренные подходы выбора структуры портфеля финансовых активов не являются эквивалентными.
Ключевые слова: *портфель финансовых активов, дисперсия, Value-at-Risk (VaR), эффективный портфель, доходность финансового актива.*

Taras Zabolotskyy,
PhD of Economics, senior lecturer of department of computer technologies, Lviv Institute of Banking the University of Banking of the National Bank of Ukraine, Ukraine

ASSETS PORTFOLIO VALUE-AT-RISK MINIMIZATION AS A GENERALIZATION OF THE CLASSICAL PORTFOLIO THEORY

The paper investigates the equivalence problem of the classic Markowitz method and the method of portfolio Value-at-Risk minimization of portfolio construction. It is shown that the set of efficient by Markowitz portfolios is wider than the set of efficient portfolios derived from the problem of portfolio VaR minimization. It is proved that there are efficient by Markowitz portfolios that are not efficient in terms of VaR minimization, and that all efficient in terms of VaR minimization portfolios are also efficient by Markowitz. I.e. the considered methods of assets portfolio construction are not equivalent.
Keywords: *assets portfolio, variance, Value-at-Risk (VaR), efficient portfolio, asset return.*

Постановка проблеми. Мінімізація фінансових ризиків є одним із головних завдань діяльності будь-якої фінансової установи. Основним інструментом для розподілу ризиків та, як наслідок, зниження загального рівня ризику є диверсифікація. Найвідомішим методом застосування диверсифікації у фінансовій діяльності є використання портфелів, наприклад, кредитний портфель, інвестиційний портфель тощо. Основний ефект диверсифікації досягається додаванням до портфеля різних активів так, щоб зниження ціни одних активів компенсувалося зростанням ціни інших, водночас цей процес не завжди призводить до зниження доходу.

На сьогодні немає одного загальновизнаного методу побудови портфеля фінансових активів. Найвідомішими методами є класичний метод Марковіца та метод мінімізації *Value-at-Risk* портфеля. Зрозуміло, що цікавим є питання сумісності цих методів.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Класична теорія портфеля бере свій початок із роботи Марковіца в 1952 році [1]. Автор вперше використав науковий підхід до вибору раціональної структури портфеля фінансових активів. З цією метою необхідно було ввести показники якості портфеля. Марковіц вибрав за ці показники математичне сподівання дохідності портфеля (пізніше ця величина отримала назву «очікувана дохідність») та дисперсію (ризик). Зрозуміло, що портфель є тим кращий чим вищий його очікуваний дохід та менша дисперсія. Зважаючи на це, очевидно, виникає оптимізаційна задача вибору раціональної структури портфеля, яка полягає в мінімізації дисперсії та максимізації очікуваного доходу. Оптимізаційні задачі такого типу не завжди мають розв’язок. Крім того, навіть коли розв’язок існує, не завжди можливо його знайти. Тому виникло питання зведення цієї двокритеріальної задачі до однокритеріальної. Марковіц розглянув два випадки: мінімізація дисперсії при обмеженій знизу очікуваній дохідності та максимізація очікуваної дохідності при обмеженій зверху дисперсії. Виявляється, що обидва ці підходи є еквівалентними та зводяться до мінімізації дисперсії при заданому рівні очікуваної дохідності або до максимізації очікуваної дохідності при заданому рівні ризику (дисперсії). Тобто постає потреба вибору певного рівня очікуваної дохідності чи дисперсії. У цьому випадку інтерес викликає задача безумовної, відносно очікуваної дохідності, мінімізації дисперсії. Виявляється, така задача має розв’язок, портфель із найменшою дисперсією. Характеристики цього портфеля задають мінімальний рівень дисперсії та очікуваної дохідності для задачі вибору раціональної структури портфеля фінансових активів. Змінюючи рівень очікуваної дохідності від найменшого значення до $+\infty$ та розв’язуючи відповідну задачу мінімізації дисперсії, отримаємо множину ефективних, згідно з Марковіцем, портфелів, яку називають ефективною множиною та яка складається з портфелів, для яких неможливо збільшити очікувану дохідність не збільшуючи дисперсію, чи еквівалентно, не можливо зменшити дисперсію не зменшуючи очікувану дохідність. Мертон у 1972 році [2] дослідив ефективну множину та виявив, що в просторі очікувана дохідність-дисперсія вона є параболою, причому вершиною її є портфель із найменшою дисперсією. Завдяки своїй простоті та результатам, що легко інтерпретувати, розроблений Марковіцем підхід набув популярності як серед теоретиків, так і серед практиків фінансового ринку.

Варто зауважити, що розроблений Марковіцем підхід оптимізує лише одну з характеристик портфеля при фіксованому значенні іншої. Кращими методами вибору раціональної структури портфеля фінансових активів є методи, що враховують обидві характеристики портфеля в процесі оптимізації. Такими методами є максимізація очікуваної корисності портфеля [3] та максимізація відношення Шарпа [4]–[6]. Виявляється, що портфелі побудовані на основі цих методів належать ефективній множині Марковіца. Причому, розглядаючи множину портфелів, отриману з задачі максимізації очікуваної корисності для різних значень коефіцієнта, що описує відношення інвестора до ризику з інтервалу $[0; +\infty)$, отримаємо, що вона співпадає з ефективною множиною портфелів за Марковіцем. Тобто кожен портфель з ефективної, згідно з Марковіцем, множини є портфелем з максимальною очікуваною корисністю при певному значенні коефіцієнта, що описує відношення інвестора до ризику та навпаки, кожен портфель із максимальною очікуваною корисністю можна отримати шляхом, наприклад, мінімізації дисперсії портфеля при певному рівні очікуваної дохідності. Отже, підхід Марковіца до вибору раціональної структури портфеля фінансових активів та метод максимізації очікуваної корисності портфеля є еквівалентні.

В останні декілька десятиріч використання дисперсії як міри ризику при формуванні та аналізі портфеля фінансових активів викликає питання. Дисперсія є двосторонньою мірою, тобто при зростанні імовірності високих прибутків зростає і дисперсія, що не узгоджується з інтуїтивним означенням ризику. Крім того, дисперсія не надає інформації про ризик як такий, а є показником розсіювання значень відносно середнього значення. Крім того, у випадку несиметричних розподілів дохідностей елементів, з яких складено портфель, інтерпретувати значення дисперсії є доволі непросто. Дослідження з теорії та практики фінансового ринку показали, що кращими мірами для опису ризику є міри, які при обчисленні ризику враховують лише додатні значення функції втрат або від’ємні значення функції дохідності [7]. Такими мірами є квантильні міри ризику. Однією з найвідоміших квантильних мір ризику є міра *Value-at-Risk* (надалі *VaR*). При використанні *VaR* для обчислення ризику необхідно задати ще один додатковий параметр α, рівень довіри. На практиці, як правило, значення для рівня довіри вибирають з множини $\{0.9, 0.95, 0.99, 0.999\}$. Зауважимо, що різні рекомендаційні програми по-різному підходять до вибору рівня довіри. Наприклад, для *RiskMetrics* цей рівень становить 0.95, а для *Basel II* – 0.99.

Питання вибору раціональної структури портфеля фінансових активів шляхом мінімізації *VaR* портфеля розглядалося в [8]–[9]. У цих роботах авторами окреслено основні рекомендації щодо вибору портфеля фінансових активів з найменшим рівнем *VaR*. Більш детальний аналіз методу мінімізації *VaR* портфеля та питання невизначеності параметрів проведено в [10]-[12]. У [8] зауважено, що портфель із найменшим рівнем *VaR* є ефективним за Марковіцем, але не збігається з портфелем з найменшою дисперсією. Крім цього, показано, що портфелі зі структурою, отриманою методом максимізації корисності на основі *VaR* [13] та методом максимізації відношення Шарпа при *VaR* як мірі ризику [6], також є ефективними за Марковіцем. Виникає питання, чи є метод вибору раціональної структури портфеля фінансових активів на основі мінімізації *VaR* еквівалентний методу Марковіца чи він є узагальненням методу Марковіца чи навпаки, метод Марковіца є більш загальний?

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є дослідження методів Марковіца та мінімізації *VaR* вибору раціональної структури портфеля фінансових активів на еквівалентність.

Виклад основного матеріалу. Опишемо спочатку алгоритми раціонального вибору структури портфеля фінансових активів Марковіца та мінімізації *VaR*. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. У фінансовій літературі часто замість ціни активу розглядають його дохідність, яка в момент часу t визначається як:

$$X_t = 100\,\mathrm{h}\,\frac{P_t}{P_{t-1}},$$

де P_t ціна певного активу в момент часу t. Позначимо через $\mathbf{X}_t=(X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{kt})'$ k-вимірний вектор дохідностей. Частку i-ого активу в портфелі позначимо через w_i, а портфель – вектор часток $\mathbf{w}=(w_1, w_2, \ldots, w_k)'$. Основними характеристиками портфеля є очікувана дохідність, дисперсія та *VaR* при рівні довіри α. Припустивши, що вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ є нормально розподіленим з параметрами μ та Σ, отримаємо:

1) дохідність портфеля в момент часу t – $X_{\mathbf{w}t} = \sum_{i=1}^{t} \mathrm{X}_{it}\, w_i = \mathbf{X}_t'\mathbf{w}$;

2) очікувана дохідність портфеля – $R_{\mathbf{w}}=\mathrm{E}(X_{\mathbf{w}t})=\mu'\mathbf{w}$;
3) дисперсія – $V_{\mathbf{w}}=D(X_{\mathbf{w}t})=\mathbf{w}'\Sigma\mathrm{w}$;
4) *VaR* при рівні довіри α – $M_{\mathbf{w}}(\alpha)= z_\alpha\sqrt{V_w} - R_w = z_\alpha\sqrt{\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}} - \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu}$,

де $z_\alpha = -\Phi^{-1}(1-\alpha)$ є α-квантилю стандартного нормального розподілу. Класична задача раціонального вибору структури портфеля фінансових активів Марковіца має вигляд

$$\begin{cases} V_w = \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} \to \min \\ R_w = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{w} = R_0 \end{cases} \quad \text{за умови } \sum_{i=1}^{k} w_i = 1. \qquad (1)$$

Окремо розглядається задача безумовної, відносно очікуваної дохідності, мінімізації дисперсії портфеля:

$$V_{\mathbf{w}}=\mathbf{w}'\Sigma\mathrm{w}\to\min \text{ за умови } \sum_{i=1}^{k} w_i = 1. \qquad (2)$$

Розв’язок задачі (2) є таким:

$$\mathbf{w}_{GMV} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}}{\mathbf{i}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}},$$

де $\mathbf{i}$ – k вимірний вектор, елементами якого є одиниці. Портфель фінансових активів з вагами $\mathbf{w}_{GMV}$ отримав назву портфеля з найменшою дисперсією. Характеристики цього портфеля є таким:

1) очікувана дохідність $R_{GMV} = \dfrac{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}}{\mathbf{i}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}}$;

2) дисперсія $V_{GMV} = \dfrac{1}{\mathbf{i}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}}$.

Використовуючи попередні позначення для ваг та характеристик портфеля з найменшою дисперсією, розв’язок задачі (1) можемо записати так [13]:

$$\mathbf{w}_{R_0} = \mathbf{w}_{GMV} + \frac{R_0 - R_{GMV}}{s}\mathbf{R}\boldsymbol{\mu},$$

де $\mathbf{R} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \dfrac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}\mathbf{i}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{i}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}}$, $s=\mu'\mathbf{R}\mu$.

Характеристики портфеля фінансових активів зі структурою $\mathbf{w}_{R_0}$ є такими:

$$R_{R_0} = \mathbf{w}'_{R_0}\boldsymbol{\mu} = R_0,$$

$$V_{R_0} = \mathbf{w}'_{R_0}\,\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{R_0} = V_{GMV} + \frac{(R_{GMV} - R_0)^2}{s},$$

$$M_{R_0}(\alpha) = z_\alpha\sqrt{V_{GMV} + \frac{(R_{GMV} - R_0)^2}{s}} - R_0.$$

У [8] розглянуто задачу безумовної, відносно очікуваної дохідності, мінімізації *VaR* портфеля. У наших позначеннях ця задача може бути записана так:

$$M_{\mathbf{w}}(\alpha) = z_\alpha\sqrt{\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}} - \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} \to \min \text{ за умови } \sum_{i=1}^{k} w_i = 1. \tag{3}$$

Розв'язок задачі (3) є таким:

$$\mathbf{w}_{VaR}(\alpha) = \mathbf{w}_{GMV} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}}\mathbf{R}\boldsymbol{\mu},$$

з характеристиками

$$R_{VaR}(\alpha) = \mathbf{w}'_{VaR}\,\boldsymbol{\mu} = R_{GMV} + \frac{s}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}}\sqrt{V_{GMV}},$$

$$V_{VaR}(\alpha) = \mathbf{w}'_{VaR}\,\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{VaR} = \frac{z_\alpha^2}{z_\alpha^2 - s}V_{GMV},$$

$$M_{VaR}(\alpha) = \sqrt{z_\alpha^2 - s}\sqrt{V_{GMV}} - R_{GMV}.$$

Зауважимо, що задача умовної мінімізації *VaR* портфеля:

$$\begin{cases} M_{\mathbf{w}}(\alpha) = z_\alpha\sqrt{\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}} - \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} \to \min \\ R_{\mathbf{w}} = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{w} = R_0 \end{cases} \text{ за умови } \sum_{i=1}^{k} w_i = 1 \tag{4}$$

є еквівалентною задачі умовної мінімізації дисперсії портфеля (1) при $R_0 \geq R_{VaR}(\alpha)$. Отже, при виконанні попередньої умови на R_0 розв'язки задач (1) та (4) збігаються. Нехай вибраний рівень довіри $\alpha<1$ є фіксованим. Тоді, враховуючи те, що $R_{VaR}(\alpha)>R_{GMV}$ для всіх $\alpha<1$, виникає питання про еквівалентність задач (1) та (4) у випадку коли $R_{VaR}(\alpha)>R_0 \geq R_{GMV}$. За такого вибору очікуваної дохідності R_0, зрозуміло, що розв'язок задачі (4) не існує, тобто усі ефективні за Марковіцем портфелі з дохідністю, меншою за $R_{VaR}(\alpha)$, не є ефективними у просторі очікувана дохідність-*VaR*. Сформулюємо отриманий результат у вигляді твердження.

Твердження 1. Нехай ми формуємо портфель з *k* цінних паперів. Позначимо $\boldsymbol{X}_t$ – *k*-вимірний вектор дохідностей в момент часу *t*. Припустимо, що $\boldsymbol{X}_t \sim N_k(\mu, \Sigma)$ та вибраний рівень довіри $\alpha<1$ є фіксованим. Тоді усі ефективні за Марковіцем портфелі з дохідністю меншою за $R_{VaR}(\alpha)$ не є ефективними у просторі очікувана дохідність-*VaR*. Зокрема не є ефективним портфель з найменшою дисперсією.

Розглянемо цю проблему з іншого боку. Чи кожен портфель з найменшим рівнем *VaR* є ефективним за Марковіцем? Відповідь на це питання подано в такому твердженні.

Твердження 2. Нехай ми формуємо портфель з *k* цінних паперів. Позначимо $\boldsymbol{X}_t$ – *k*-вимірний вектор дохідностей в момент часу *t*. Припустимо, що $\boldsymbol{X}_t \sim N_k(\mu, \Sigma)$. Тоді для довільного $\alpha>0.5$ портфель з найменшим рівнем *VaR* (портфель, зі структурою $\mathbf{w}_{VaR}(\alpha)$) є ефективним за Марковіцем.

Доведення. Підставивши в умову задачі (1) значення $R_0=R_{VaR}(\alpha)$, отримаємо

$$\mathbf{w}_{R_0} = \mathbf{w}_{GMV} + \frac{R_{VaR}(\alpha) - R_{GMV}}{s}\mathbf{R}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{w}_{GMV} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}}\mathbf{R}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{w}_{VaR}(\alpha).$$

Отже, портфель зі структурою $\mathbf{w}_{VaR}(\alpha)$ можна отримати як розв'язок задачі (1), що і доводить його ефективність за Марковіцем.

Висновки. Робота присвячена дослідженню питання сумісності методів Марковіца та мінімізації *VaR* портфеля вибору раціональної структури портфеля фінансових активів. Показано, що два цих методи не є еквівалентними. З цією метою розглянуто множини ефективних портфелів, які отримуються при використанні кожного з методів. Доведено, що існують ефективні за Марковіцем портфелі, які не є ефективними в умовах використання мінімізації *VaR* при виборі структури портфеля (таким портфелем, зокрема, є портфель з найменшою дисперсією), а також, що всі ефективні портфелі в умовах використання мінімізації *VaR* при виборі структури портфеля є ефективними за Марковіцем. Тобто множина ефективних за Марковіцем портфелів є ширшою, ніж множина ефективних портфелів, отримана при використанні методу мінімізації *VaR* при виборі раціональної структури портфеля.

Література:

1. Markowitz H. Portfolio selection / H. Markowitz // Journal of finance. – 1952. – № 7. – P. 77–91.
2. Merton R. C. An analytical derivation of the efficient frontier / R. C. Merton // Journal of financial and quantitative analysis – 1972. – № 7. – P. 1851–1872.
3. Okhrin Y. Distributional properties of optimal portfolio weights / Y. Okhrin, W. Schmid // Journal of econometrics. – 2006. – № 134. – P. 235–256.
4. Sharpe W. F. The Sharpe ratio / W. F. Sharpe // The journal of portfolio management. – 1994. – Vol. 21. – № 1. – P. 49–58.
5. Lo A. W. The statistics of Sharpe ratio / A. W. Lo // Financial analysts journal. – 2002. – № 58. – P. 36–52.
6. Боднар Т.Д. Максимізація відношення Шарпа портфеля фінансових активів у контексті мінімізації ризику / Т. Д. Боднар, Т. М. Заболоцький // Економічний часопис – XXI. – 2013. – № 11–12 (1). – С. 110–113.
7. Krokhmal P. Modeling and optimization of risk / P. Krokhmal, M. Zabarankin, S. Uryasev // Surveys in operations research and management science. – 2011. – № 16. – P. 49–66.
8. Alexander G. J. Economic implication of using a mean-VaR model for portfolio selection: a comparison with mean-variance analysis / G. J. Alexander, M. A. Baptista // Journal of economic dynamics & control. – 2002. – No 26. – P. 1159–1193.
9. Alexander G. J. A comparison of VaR and CVaR constraints on portfolio selection with the mean-variance model / G. J. Alexander, M. A. Baptista // Management science. – 2004. – № 50 (9). – P. 1261–1273.
10. Заболоцький Т. М. Оцінка ваг валютного портфелю з найменшим рівнем VaR / Т. М. Заболоцький // Вісник НБУ. – 2011. – № 8. – С. 31–33.
11. Заболоцький Т. М. Розподіл характеристик портфелю акцій з найменшим рівнем VaR / Т. М. Заболоцький // Моделювання та інформаційні системи в економіці. – 2011. – № 85. – С. 165–179.
12. Заболоцький Т. М. Спільний розподіл дохідності та дисперсії портфеля акцій з найменшим рівнем VaR / Т. М. Заболоцький // Моделювання та інформаційні системи в економіці. – 2012. – № 86. – С. 107–119.
13. Заболоцький Т. М. Portfolio choice problem with the Value-at-Risk utility function under general linear constraints / Т. М. Заболоцький, Т. Д. Боднар, В. В. Вітлінський // Економічна кібернетика. – 2012. – № 4–6 (76–78). – С. 4–11.