Отримано: 11.10.2014 р.

Прорецензовано: 22.10.2014 р.

Прийнято до друку: 04.12.2014 р.

Хохлов В. Ю. Оцінка ризику для розподілів з «великими хвостами» / В. Ю. Хохлов // Наукові записки Національного університету «Острозька академія». Серія «Економіка» : збірник наукових праць / ред. кол. : І. Д. Пасічник, О. І. Дем'янчук. – Острог : Видавництво Національного університету «Острозька академія», 2014. – Випуск 27. – С. 150–153.

УДК 336.767

JEL-класифікація: G32

Хохлов Валентин Юрійович,
кандидат технічних наук, менеджер з міжнародного маркетингу, Global Spirits

ОЦІНКА РИЗИКУ ДЛЯ РОЗПОДІЛІВ З «ВЕЛИКИМИ ХВОСТАМИ»

Value at Risk (VaR) є одним з основних показників, що використовується в управлінні ризиками. Зазвичай при його підрахунку використовують нормальний розподіл ймовірності, але фактичній розподіл дохідності не є нормальним. У статті виведені формули розрахунку VaR з використанням розподілів Стьюдента та Лапласа. На прикладі активів на фондових ринках США та Росії показано, що вони значно підвищують якість оцінки ризику у порівнянні з нормальним розподілом.

Ключові слова: *розподіл дохідності акцій, управління ризиками, нормальний розподіл, розподіл Стьюдента, розподіл Лапласа, великі хвости.*

Хохлов Валентин Юрьевич,
кандидат технических наук, менеджер с международного маркетинга, Global Spirits

ОЦЕНКА РИСКА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ С «БОЛЬШИМИ ХВОСТАМИ»

Value at Risk (VaR) является одним из основных показателей, используемых в риск-менеджменте. Обычно при его расчете используют нормальное распределение вероятности, однако фактическое распределение доходности обычно не является нормальным. В статье выведены формулы расчета VaR с использованием распределение Стьюдента и Лапласа. На примере активов на фондовых рынках США и России показано, что они существенно повышают качество оценки рисков в сравнении с нормальным распределением.

Ключевые слова: *распределение доходности акций, управление рисками, нормальное распределение, распределение Стьюдента, распределение Лапласа, большие хвосты.*

Valentyn Hohlov,
candidate of technical sciences, manager of international marketing, Global Spirits

USING «FAT TAILS» DISTRIBUTIONS FOR RISK MANAGEMENT

Value at Risk (VaR) is one of the most important indicators used in risk management. Typically the normal distribution is used for its calculation, but the actual distribution of securities' returns has much more probability in its tails than the normal distribution. In this article we derive VaR formulas for the Student's t and Laplace distributions. Using assets on the U.S. and Russian stock market, we show that using these «fat-tailed» distributions lead to a significant increase in quality of risk measurement comparing to the normal distribution.

Key words: *distributions of stock returns, risk management, normal distribution, Student's t distribution, Laplace distribution, fat tails.*

Постановка проблеми. Одним з основних показників, який застосовується у сучасній практиці управління ризиками, є Value at Risk (VaR). Його активно просуває як провідна професійна асоціація ризик-менеджерів Global Association of Risk Professionals (GARP), так і Базельський комітет з питань банківського нагляду. Саме цей показник є рекомендованим для вимірювання ринкового ризику згідно з Basel II. Суттєвим недоліком VaR є його залежність від розподілу дохідності фінансового активу – зазвичай, використовується нормальний розподіл, але, як показують дослідження, він неадекватно моделює фактичний розподіл дохідності через проблему «великих хвостів». Тому пошук альтернативних розподілів, що краще моделюють ці «хвости» є актуальною задачею досліджень.

Аналіз останніх досліджень. Однією з найбільш ґрунтовних праць, присвячених ризик-менеджменту та використанню VaR є книга Джоріона [1]. Автор демонструє універсальність VaR як головного показника у ризик-менеджменті, але він використовує лише нормальний розподіл логарифму дохідності. Припущення щодо нормальності розподілу жорстко критикує Н. Талеб [2] через проблему «великих хвостів», тобто значну невідповідність густини ймовірності у хвостах нормального розподілу та фактичної густини. Моделювання «великих хвостів» розподілу дохідності, зокрема використання альтернативних розподілів, було розглянуто у працях Апарісіо й Естради [3], Ліндена [4], Наймана [5]. Ці автори з використанням статистичних критеріїв Пірсона та Колмогорова-Смірнова довели перевагу розподілів Стьюдента та Лапласа над нормальним при моделюванні розподілу дохідності акцій. Тому логічним продовженням цих робіт є дослідження застосування цих розподілів для оцінки ризику та визначенню VaR.

Мета та завдання дослідження. Метою дослідження є покращення якості оцінки VaR за рахунок використання розподілів, які краще моделюють «великі хвости». Завдання дослідження: 1) вивести формули розрахунку VaR для розподілів Стьюдента та Лапласа, 2) визначити показник якості оцінки VaR, 3) перевірити якість оцінки VaR при використанні різних розподілів на реальних ринкових даних.

Формули VaR для логнормального розподілу

Використання нормального розподілу логарифму дохідності (що еквівалентно логнормальному розподілу самої дохідності) довгий час було стандартом де-факто у фінансах. Але гостра критика, якій піддав це припущення Н. Талеб у [2] та нещодавні кризи на фондовому ринку, такі як банкрутство Long Term Capital Management у 1998 році та фінансова криза 2008-2009 років, заставляють переглянути нормальність розподілу дохідності. Той факт, що нормальний розподіл у тисячі разів занижує ймовірність у хвостах розподілу, таким чином не даючи адекватної оцінки ризику виникнення екстремальних збитків, був доведений, зокрема, у статті [5]. У цій же статті показано, як використання розподілів Стьюдента та Лапласа дозволяє покращити якість моделювання розподілу дохідності, насамперед, у його хвостах. Це обґрунтовує доцільність переходу до цих розподілів при оцінці ризику та розрахунку VaR.

Перш ніж перейти до виводу формул для VaR, розглянемо припущення, які робляться при визначенні цього показнику. Так, Джоріон [1] у формулі VaR визначає збиток як різницю між первісною вартістю портфелю та математичним очікуванням його кінцевої вартості. Але більшість дослідників, а також стандарти фінансової звітності та практика оподаткування, використовують інше визначення збитку – це різниця між первісною вартістю портфелю та його кінцевою вартістю. Оскільки остання є випадковою змінною, то й збиток є теж випадковою змінною. Другим важливим припущенням є те, що ми моделюємо розподіл не самої дохідності, а її логарифму. Але для того, щоб повернутися до VaR, нам потрібно зробити зворотній перехід від логарифму до самої дохідності.

Прийнявши до уваги зазначені припущення, позначимо через P_0 первісну вартість портфелю, а P_T – його кінцеву вартість, тоді збиток $L = -(P_T - P_0)$. Позначивши через r дохідність, цю формулу зведемо до $L = -(P_0 (1 + r) - P_0) = -P_0 r$. Позначимо логарифм дохідності через $y = ln(1 + r)$, саме це й буде випадковою змінною, математичне очікування, стандартне відхилення та стандартну кумулятивну функцію якої позначимо відповідно через μ, σ, Φ. Позначимо через V VaR з заданою ймовірністю c та введемо відносний показник, VaR-множник $v = V/P_0$. Виходячи з визначення VaR,

$$P(L > V) = P(-r > v) = P(1 + r < 1 - v) = P(y < \ln(1 - v)) = \Phi\left(\frac{\ln(1 - v) - \mu}{\sigma}\right) = c ,$$

де L – збиток,
V – абсолютне значення VaR з ймовірністю c,
v – відносне значення VaR з ймовірністю c,
r – дохідність,
y – логарифм дохідності,
μ – математичне очікування дохідності,
σ – стандартне відхилення дохідності,
Φ – кумулятивна функція стандартного розподілу дохідності.

Зробивши алгебраїчні перетворення, знаходимо загальну формулу для VaR-множника:

$$v = 1 - \exp\left(\mu + \sigma\Phi^{-1}(c)\right) = 1 - \exp(\mu)\exp(\sigma)^{\Phi^{-1}(c)} \quad (1)$$

Формула VaR для розподілу Стьюдента

Цю формулу можна використовувати для будь-якого розподілу, що описується двома параметрами. Але при використанні розподілу Стьюдента, яке має два параметри при заданому числі ступенів свободи df, слід пам'ятати, що його параметр масштабу не є стандартним відхиленням. Цей параметр масштабу дорівнює $\sqrt{1 - 2/df}$, тому якщо позначити через t кумулятивну функцію стандартного розподілу Стьюдента, то формулу (1) можна переписати у такому вигляді:

$$v = 1 - \exp(\mu)\exp(\sigma)^{t^{-1}(c)\sqrt{1-2/df}} \quad (2)$$

де df – число ступенів свободи розподілу Стьюдента,

t – кумулятивна функція розподілу Стьюдента з *df* ступенями свободи.

Зазначимо, що вибір кількості ступенів свободи не є теоретично обґрунтованим, а зазвичай визначається емпірично. Більшість дослідників використовує від 3 до 6 ступенів свободи при моделюванні щоденної дохідності, а з досвіду автора найкращі результати оцінки VaR можна отримати при 3 ступенях свободи.

Формула VaR для розподілу Лапласа

Розподіл Лапласа має досить просту формулу кумулятивної функції розподілу, застосовуючи її для випадку $c < 50\ \%$ формулу (1) можна переписати у такому простому вигляді:

$$v = 1 - \exp(\mu)(2c)^{b} \qquad (3)$$

де b – параметр масштабу розподілу Лапласа.

Слід зазначити, що при використанні розподілу Лапласа зазвичай μ оцінюється через вибіркову медіану, а b – через вибіркове середнє абсолютне відхилення (MAD, mean absolute deviation), а не через вибіркове стандартне відхилення. З досвіду автора, саме така оцінка параметрів розподілу Лапласа дозволяє отримати найкращу якість моделювання дохідності на оцінки ризику.

Оцінка якості розрахунку VaR

Для оцінки якості розрахунку VaR розглянемо похибку оцінки на виборці активів. Абсолютну похибку будемо розраховувати як різницю між значенням VaR, розрахованим по формулах (1)-(3), та фактичним значенням VaR, розрахованим по щоденним дохідностям. Відносну похибку будемо розраховувати як абсолютну похибку поділену на фактичну VaR. Але коли ми розглядаємо вибірку активів, ми не можемо визначити середню похибку, тому що додатні та від'ємні похибки будуть перекривати один одну, тому потрібно використовувати середньоквадратичну похибку (RMSE, root mean squared error) як показник якості оцінки розрахунку VaR на вибірці активів.

Значення VaR розраховувались по щоденним ціновим даним за 20 років (1991-2010) для акцій та 40 років (1971-2010) для індексів. Наприклад, для індексу Dow Jones була використана вибірка з 10,349 щоденних дохідностей (вибіркове середнє 0.0258%, стандартне відхилення 1.0846%, медіана 0.0367%, MAD 0.7430%), для неї фактичні значення VaR з ймовірностями 5%, 1% та 0.1% склали відповідно 1.59%, 2.71% та 6.66%. Використання формули (1) для нормального розподілу дає такі розрахункові значення VaR 5%, 1% та 0.1%: 1.74%, 2.47% та 3.27% відповідно. Абсолютна похибка оцінки VaR 5% складає 0.15%, відносна похибка оцінка складає 0.15% / 1.59% = 0.0929 = 9.29%. Використання формули (2) для розподілу Стьюдента з 3 ступенями свободи дає розрахункові значення VaR 5%, 1% та 0.1%: 1.44%, 2.78% та 6.17% відповідно. Використання формули (3) для розподілу Лапласа дає розрахункові значення VaR 5%, 1% та 0.1%: 1.66%, 2.83% та 4.48% відповідно.

У таблиці 1 наведено абсолютні похибки оцінки VaR для вибраних активів на ринку США та RMSE для 42 активів. Як можна побачити, у хвостах розподілу (ймовірність 1% та 0.1%) нормальний розподіл дає значну гіршу оцінку VaR, ніж розподіли Стьюдента та Лапласа. Для таких ймовірностей краще підходить розподіл Стьюдента. Але при ймовірності 5% цей розподіл занижує оцінку ризику, для цього рівня ймовірності кращим є використання розподілу Лапласа.

Таблиця 1.
Абсолютні похибки оцінювання VaR на ринку США

Розподіл	**Нормальний**			**Стьюдента (df = 3)**			**Лапласа**		
VaR @	**5%**	**1%**	**0.1%**	**5%**	**1%**	**0.1%**	**5%**	**1%**	**0.1%**
Dow Jones	0.15%	-0.24%	-3.39%	-0.16%	0.07%	-0.48%	0.07%	0.12%	-2.18%
S&P 500	0.15%	-0.39%	-3.14%	-0.16%	-0.08%	-0.24%	0.04%	-0.07%	-1.99%
Apple	0.61%	-0.72%	-8.47%	-0.27%	0.16%	-0.63%	0.45%	0.35%	-5.12%
Boeing	0.22%	-0.88%	-4.44%	-0.34%	-0.32%	0.68%	0.23%	0.00%	-1.96%
Ford	0.52%	-0.41%	-8.84%	-0.21%	0.33%	-2.20%	0.36%	0.46%	-6.05%
General Electric	0.32%	-1.18%	-5.26%	-0.21%	-0.65%	-0.39%	0.20%	-0.55%	-3.24%
Coca-Cola	0.11%	-0.45%	-4.06%	-0.32%	-0.01%	-0.05%	0.13%	0.25%	-2.13%
Nike	0.36%	-0.99%	-4.71%	-0.25%	-0.38%	0.84%	0.31%	-0.15%	-2.22%
Exxon Mobil	0.13%	-0.56%	-3.94%	-0.31%	-0.12%	0.12%	0.15%	0.16%	-1.96%
RMSE	**0.47%**	**1.65%**	**8.18%**	**0.39%**	**1.05%**	**3.14%**	**0.23%**	**1.27%**	**6.26%**

У таблиці 2 наведено абсолютні похибки оцінки VaR та RMSE для 6 активів на ринку Росії. Результати є дуже подібними до наведених вище – розподіл Стьюдента дає найкращі результати при оцінці VaR 1% та 0.1%, а при оцінці VaR 5% краще застосовувати розподіл Лапласа.

Таблиця 2.
Абсолютні похибки оцінювання VaR на ринку Росії

Розподіл	**Нормальний**			**Стьюдента (df = 3)**			**Лапласа**		
VaR @	**5%**	**1%**	**0.1%**	**5%**	**1%**	**0.1%**	**5%**	**1%**	**0.1%**
Індекс РТС	0.45%	-0.99%	-6.80%	-0.31%	-0.23%	0.02%	0.31%	-0.10%	-3.98%
Газпром	0.31%	-2.99%	-13.80%	-0.76%	-1.92%	-4.44%	-0.29%	-2.27%	-10.60%
Сбербанк	1.70%	-4.25%	-30.46%	0.36%	-2.92%	-19.10%	0.04%	-4.81%	-28.70%
Лукойл	0.54%	-3.04%	-11.07%	-0.45%	-2.05%	-2.34%	0.00%	-2.31%	-7.97%
Новатэк	0.98%	-3.79%	-23.99%	-0.44%	-2.39%	-12.09%	-0.06%	-3.23%	-20.41%
ВТБ	1.44%	-13.91%	-14.89%	-0.34%	-12.20%	-0.67%	-0.93%	-14.88%	-12.93%
RMSE	**1.04%**	**6.39%**	**18.64%**	**0.47%**	**5.34%**	**9.46%**	**0.42%**	**6.65%**	**16.33%**

Наведені у таблицях 1 та 2 абсолютні значення похибок є важливими, тому що вони показують недооцінку або переоцінку ризику, але вони не показують, наскільки великою вона є відносно фактичного значення VaR. Для цього краще використовувати відносну похибку. Значення RMSE, розраховані з використанням відносної похибки, наведені у таблиці 3. Як можна побачити з неї, заниження оцінки ризику при ймовірності 0.1% при використанні нормального розподілу складає майже 2 рази, але за допомогою розподілу Стьюдента його можна істотно зменшити. У той же час заниження оцінки ризику при ймовірності 5% не є таким значним, воно складає біля 15% для нормального розподілу, але використання розподілу Лапласа скорочує його до 5.5%-7%.

Таблиця 3.
Відносні похибки оцінювання VaR для різних розподілів

Розподіл	**Нормальний**			**Стьюдента (df = 3)**			**Лапласа**		
VaR @	**5%**	**1%**	**0.1%**	**5%**	**1%**	**0.1%**	**5%**	**1%**	**0.1%**
Ринок США	15.0%	19.0%	48.6%	11.2%	11.3%	20.2%	7.0%	13.9%	34.7%
Ринок Росії	15.4%	29.6%	54.5%	7.9%	22.4%	23.1%	5.5%	28.6%	44.8%

Висновки. Використання нормального розподілу призводить до заниження оцінки ризику та недооцінки VaR, тому що розподіли фактичної дохідності мають значно більші хвости за нормальний розподіл. Але використання розподілів з «великими хвостами», таких як розподіли Стьюдента та Лапласа, дозволяє вирішити цю проблему. Порівняння значень VaR, розрахованих з використанням цих розподілів, зі значеннями, розрахованими з використанням нормального розподілу, показало, що VaR 5% найкраще оцінюється при застосуванні розподілу Лапласа, але при зменшенні ймовірності до 1% та 0.1% розподіл Стьюдента з 3 ступенями свободи починає давати значно точнішу оцінку VaR.

Результати статті на практиці можуть використовуватись для більш точної оцінки ризиків в процесі управління портфелями цінних паперів чи для аналізу фінансового стану банків. Подальші дослідження у цій галузі можуть бути націлені на розвиток методів управління ризиком для розподілів з «великими хвостами», а також вивченню та адаптації до динамічних характеристик, наприклад, за допомогою бектестування. Крім того, цікавим напрямком подальших досліджень є перехід у формулах від простого VaR до умовного cVaR або очікуваного розміру збитків понад VaR.

Література:

1. Jorion P. Financial Risk Manager Handbook. – Wiley, 2003. – 832 p.
2. Талеб Н. Н. Черный лебедь. Под знаком непредсказуемости. – М.: КоЛибри, 2009. – 528 с.
3. Aparicio F. Empirical Distributions of Stock Returns: Scandinavian Securities Markets, 1990-95 / F. Aparicio, J. Estrada // European Journal of Finance. – 2001. – No. 7. – P. 1–21.
4. Linden M. A model for stock return distribution // International Journal of Finance & Economics. – 2001. – No. 6. – P. 159–169.
5. Найман Е. Л. Розподіл щоденної дохідності акцій / Е. Л. Найман, В. Ю. Хохлов // Фінанси України. – 2012. – № 2. – С. 70-79.