Сявавко М. С.,
д.ф.-м.н. Львівського державного інституту новітніх технологій та управління

Рибицька О. М.,
к.ф.-м.н. Львівського державного інституту новітніх технологій та управління

НЕЧІТКА СТАТИСТИКА ТА ЇЇ ВИКОРИСТАННЯ В ЕКОНОМІЦІ

У статті стисло викладено потребу розробки нових методів математичного опису економічної інформації, що характеризується високим рівнем невизначеності, а також подано один із можливих підходів, який ґрунтується на узагальненні поняття "міри" та побудови нечітких мір, незалежних від низки обмежень ймовірнісної міри.

The article outlines the necessity to develop the new methods of mathematical description of economic information, which is characterized by a high level of uncertainty. The authors offer one of the possible approaches, which is based on generalization of concept of measure and forming of vague measures, which are independent from a lot of obstacles of probability measure.

За останній час зросла потреба розробки нових методів математичного опису економічної інформації, що характеризується високим рівнем невизначеності. Один із можливих підходів ґрунтується на узагальненні поняття міри та побудови нечітких мір, незалежних від низки обмежень ймовірнісної міри. У 1972 році японські вчені Сугено і Цукамото на засадах нечіткої міри ввели поняття "нечіткого інтеграла", що ознаменував собою появу другого етапу розвитку математичної статистики, а саме нечіткої статистики.

Вступ. Ще в курсі шкільної геометрії ми познайомилися з поняттями "довжини відрізка", "площі плоскої фігури" та "об’єму тіла".

Однак, коли мова йтиме про довільну обмежену множину точок, то замість слів “довжина”, “площа”, “об’єм”, ми вживаємо більш загальне поняття “міра множини”.

Серед важливих мір класичного характеру є введена у 1880 році міра Жордана та у 1902 році міра Лебега, що узагальнює першу. Серед мір Лебега практичного звучання набула міра ймовірності або розподіл ймовірності. Ця міра є фундаментом класичного розвитку математичної статистики. Нагадаємо, що мірою ймовірності є дійсна невід’ємна функція P із класу A підмножин (подій) непустої множини Ω (множина елементарних подій), що утворюють борелівське поле (тобто замкнене відносно теоретико-множинних операцій, що виконуються серед численних чисел), така, дія якої характеризується такими співвідношеннями:

$$P(\Omega) = 1, \quad P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad ,(1)$$

для A_i I $A_j = \emptyset$ за $i \neq j$ (зчисленна адитивність).

Серед прикладів ймовірнісної міри виділимо дискретний пуасонівський розподіл ймовірностей

$$P(\{k\}) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad .$$

Тут $\Omega=\{1,2,3,\ldots\}$, A клас підмножин із Ω, $\lambda>0$.

Із неперервних імовірнісних мір вкажемо на нормальний розподіл ймовірності. Нехай $\Omega=R$ (дійсна пряма), а A клас борелівських підмножин із R. Тоді міра

$$P(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A e^{-x^2/2} dx$$

визначає нормальний розподіл ймовірності.

Оскільки реальна поведінка людини зазвичай [1] протирічить припущенню про адитивність мір (1), які вона використовує при оцінці мір, науковці [2, 3] були змушені ввести більш загальне поняття, аніж поняття ймовірнісного розподілу. Потрібно було 70 років, щоб виникло нове поняття – поняття "нечіткої міри".

Нечіткі міри забезпечують більш повне представлення вхідних даних для моделювання реальних процесів із врахуванням модальності інформаційних одиниць. Зауважимо, що модальність є граматичною категорією, що виражає відношення змісту висловлювання до об’єктивної дійсності. Модальність – це характеристика думки, яка залежить від того, що в судженні стверджується (можливість, вірогідність, визначеність, правдоподібність, достовірність, довір’я, необізнаність тощо).

Невизначеність опису процесів управління в економіці формально можна представити через деяку універсальну множину (базову шкалу, універсум) X. Її елемерентами можуть бути, наприклад, результати рішення або експерименту (прогноз погоди, купівля автомобіля, показники проекту), діапазон зміни фізичної величини, можливі семантичні (означальні, змістовні) значення виразу. Невизначеність полягає в тому, що точно невідомо, який елемент $x \in X$ насправді мав, чи буде мати, місце. Конкретна інтерпретація невизначеності може бути різноманітна – залежно від фізичної природи універсальної множини:

– *неабсолютна істинність* деякого вислову, або відмінна від одиниці ймовірність деякої події;

– *неповна впевненість* особи, що приймає рішення, в своїх діях;

– *часткова належність* деякій підмножині, що важлива при використанні нечіткої інформації.

Результати досліджень Г. Шефера [4] засвідчили можливість з єдиних позицій підійти до питань формального представлення невизначеності в математичних моделях. Якщо говорити більш конкретно, то використання нечітких мір дозволяє перейти до єдиного математичного опису чітких, імовірнісних та нечітких вхідних даних [5], використовувати при моделюванні складних процесів усю доступну інформацію, враховувати синергетичні ефекти, вплив суб'єктивних рішень, що, без сумніву, підвищить достовірність та якість прийнятих рішень. Виникла *теорія свідчень* (*theory oferidence*). Поняття свідчення в цій теорії – це довільний опис ситуацій, що містять невизначеність, через певний набір висловлювань.

1.1. Розподіл впевненості.

У роботі [4] для виміру міри (ступеня) визначеності автор пропонує використовувати деяку одиничну *масу впевненості*, розподілену між елементами множини та її підмножинами. Якщо при цьому вся маса впевненості повністю зосереджена у фіксованому елементі $x_0 \in X$, то говоритимемо про ситуацію *повної визначеності*. Якщо ж вона розподілена хоча б між двома точками $x_1, x_2 \in X$, то вже виникає деяка *невизначеність*.

Розподіл впевненості може мати різноманітний вигляд. Г. Шефер запропонував наступну геометричну інтерпретацію. Наприклад, якщо множину зобразити у вигляді набору точок, то впевненість можна відобразити у вигляді мас, закріплених за цими точками (рис. 1).

У найпростішому випадку маси закріплені в точках жорстко. На рис. 1 кожна з точок, що складає множину $X=\{x_1, x_2, x_3\}$, володіє жорстко закріпленою масою. Але деяка маса впевненості може не тільки бути жорстко закріпленою за однією точкою, але й відноситися відразу до декількох точок одночасно. Це відповідає масі, що вільно переміщується між цими точками, тобто маса відноситься одночасно до будь-якої з них.

Цей випадок відповідає сильній невизначеності: вся множина розбита на класи еквівалентності (підмножини), можливо такі, що перетинаються, між якими розподілена впевненість.

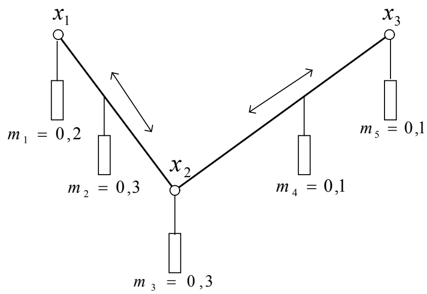

Рис. 1. Геометрична інтерпретація розподілу впевненості

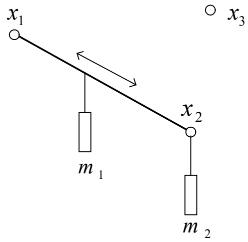

Рис. 2. Геометрична інтерпретація розподілу з невідомими масами впевненості

Наприклад, якщо ми на 90 % впевнені в тому, що придбаний нами грузинський коньяк не підроблений, то маса впевненості $m_1=0,9$ стосується усіх грузинських коньяків, а маса $m_2=0,1$ – усіх інших марок коньяків, причому більш докладний розподіл невідомий.

У такому підході вся невизначеність зводиться до того чи іншого способу розподілу мас впевненості. Зауважимо, що на рис. 1 усі маси точно відомі, але наявна невизначеність – невідомо, за якими елементами множини X закріплені маси m_2 і m_4: перша з них закріплена за підмножиною $\{x_1, x_2\}$, друга – за $\{x_2, x_3\}$.

Тим не менше, в окремих випадках деякі висновки можна зробити навіть за невідомих мас впевненості тільки на підставі їх розподілу. Ось, на рис. 2 маси m_1 і m_2 невідомі, але тут можна дійти висновку, що не існує жодної абсолютної впевненості в x_3, тоді як певні докази на користь x_1 і x_2 наявні, причому на користь x_2 їх більше – завдяки масі m_2, що безпосередньо закріплена за x_2. Ситуація, що зображена на рис. 2, належить до так званого *узгодженого розподілу впевненості*. Тільки в подібних випадках можна порівнювати ступені впевненості для того чи іншого елемента множини X, не знаючи самих мас впевненості. У всіх інших випадках маси впевненості повинні бути відомі, оскільки інші варіанти рівнозначні повній невизначеності.

За означенням із роботи [4], *розподілом впевненості* називають функцію вигляду

$m:X\rightarrow[0,1]$, (2)

яка володіє властивостями

m(∅)=0; $\sum_{A \subseteq X} m(A) = 1$.

При цьому *m(A)* виражає ступінь (міру) впевненості, віднесену до множини в цілому; якщо за окремими елементами або підмножинами множини *A* ще закріплені окремі маси впевненості, то в *m(A)* вони не входять. Так, для прикладу, що зображений на рис. 1, маємо:

A 0 $\{x_1\}$ $\{x_2\}$ $\{x_3\}$ $\{x_1\ x_2\}$ $\{x_2\ x_3\}$ $\{x_1\ x_3\}$ X

m(A) | 0 0,2 0,3 0,1 0,3 0,1 0 0

Якщо *m(A)>0*, тоді підмножину $A \subseteq X$ називають *фокальним елементом розподілу впевненості* на множині *X*. Сукупність усіх фокальних елементів розподілу впевненості називають її *ядром*. Так, на рис. 1 ядро розподілу впевненості складають підмножини $\{x_1\}$ $\{x_2\}$ $\{x_3\}$ $\{x_1\ x_2\}$ $\{x_2\ x_3\}$, а для рис. 2 – відповідно $\{x_2\}$ $\{x_1\ x_2\}$. Надалі їх позначатимемо символом $E_p,\ p = \overline{1, N}$.

1.2. Нечіткі міри.

Нехай задана певна базова шкала (універсум) *X*. Надалі множину всіх підмножин називатимемо булеаном. Його позначатимемо символом *B(X)*.

Як приклад, візьмемо дискретну множину трьох точок $X = \{x_1\ x_2 x_3\}$. Її булеаном буде множина

$B(X)=\{\emptyset\ \{x_1\}\ \{x_2\}\ \{x_3\}\ \{x_1\ x_2\}\ \{x_2\ x_3\}\ \{x_1\ x_3\}\ X$.

Нехай тут $A=\{x_1\}$, $B=\{x_1\ x_2\}$. Тоді $A, B \in B$, $A \supset B$.

Означення 1. Нечіткою мірою g(•) називається функція множини, що визначена на B та володіє такими властивостями:

а) $g(\emptyset)=0, g(X)=1$ (обмеженість);

б) якщо $A, B \leq B$ і $A \subset B$, тоді $g(A) \leq g(B)$ (монотонність);

в) якщо $F_n \subset B$ для всіх $1 \leq n < \infty$ і послідовність $\{F_n\}$ монотонна (в сенсі включення), тоді $\lim_{n \to \infty} g(F_n) = g(\lim_{n \to \infty} F_n)$ (неперервність).

Надалі трійку *X, B, g* називатимемо простором нечіткої міри, а *g* – нечіткою мірою на *(X, B)*.

Нехай $A \subset X$. Тоді вираз *g(A)* встановлює міру, котра характеризує ступінь нечіткості *A* стосовно *X*, тобто оцінку нечіткості судження “$A \subset X$” (ступінь суб’єктивної сумісності *A* в *X*).

Надалі переконаємось також у тому, що в загальному випадку для нечіткої міри не обов’язково повинна виконуватись умова адитивності:

$g(A, Y, B) \neq g(A) + g(B)$ для $A I B = \emptyset$.

Таким чином, нечітка міра є однопараметричним розширенням ймовірнісної міри.

З математичного погляду, означення 1 не суворо конструктивне, тому часто замість булеана B розглядають поле борелівських підмножин множини *X* (мінімальна σ-алгебра, що містить усі відкриті підмножини множини *X*). Використання σ-алгебри підмножин для обмежених або компактних універсумів *X* не приводить у теорії нечітких множин до концептуальних протиріч.

Серед прикладів нечітких мір вкажемо на такі міри: міра Дірака, супераддитивна міра довір’я, субадитивна міра правдоподібності, міра ймовірності, g_λ-міра Сугено, g_ν-міра Цукамото, міра можливості та міра необхідності.

Для *функції довір’я (belief function)* ступінь довіри вислову *A(A≠0)*, яке є істинним, не обов’язково дорівнює 1. Це означає, що сума ступенів довір’я вислову *A* та його заперечення Ā також не обов’язково дорівнює 1, а може бути або рівною, або меншою за 1. Іншими словами, коли вислів *A(A≠0)* є істинним з певною мірою s∈[0,1], його міра невизначеності виражається через функцію

$$\forall B \in \square : Bel(B) = \begin{cases} 1, & якщо \;\; B = X, \\ s, & якщо \;\; B \supset A, \; B \neq X, \\ 0, & якщо \;\; B \neq A. \end{cases} \quad (3)$$

Якщо в (3) *s=1*, то одержимо міру, яку називають мірою визначеності, що зосереджена на *A*. Цей випадок відповідає *детермінованій ситуації* (міра повної впевненості).

Якщо в (3) *s=0* або *A=X*, тоді *Bel(B)* називають пустою функцією довір’я (повне незнання).

Для прикладу, що зображений на рис.1:

A	$\emptyset$	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1,x_2\}$	$\{x_2,x_3\}$	$\{x_1,x_3\}$	X
$BelA$	0	0,2	0,3	0,1	0,8	0,5	0,3	1

Як бачимо, функцію Bel:X→[0,1] можна визначити так:

$Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B)$ для всіх *A*⊆*X*,(4),

тобто з допомогою сумування маси впевненості *m(A)*, що точно відноситься до множини *m(B)*, а також мас впевненості, що відносяться до підмножин B⊂A.

Задаючи функцію впевненості, можна встановити і декілька допоміжних характеристик:

міру непевності в A⊆X

$$Dou(A) = Bel(\overline{A}) \quad ;$$

міру правдоподібності Pl (plausibility measure) множини *A*

$$P\ (A) = 1 - Dou(A) = 1 - Bel(\overline{A}) = \sum_{\substack{A \cap B = \emptyset \\ B \subseteq X}} m(B) \quad .(5)$$

Bel(A) ступінь впевненості в множині *A* – загальна маса, що залишається, якщо з множини *X* вилучити всі елементи, що не входять в *A*, разом із закріпленими за ними масами;

Pl(A) – загальна маса, яку можна зсунути до елементів множини *A*.

Для прикладу, що зображений на рис.1,

A	$\emptyset$	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_1, x_3\}$	X
$Pl(A)$	0	0,5	0,7	0,2	0,9	0,8	0,7	1

.

За аналогією з теорією ймовірності величини *Bel(A)* і *Pl(A)* одержали відповідно назви: *P*(A)* – нижня і *P*(A)* верхня ймовірності множини $A \subseteq X$ в тому сенсі, що допускається існування деякої істинностної ймовірності *P(A):*

$Bel(A)=p_*(A) \leq P(A) \leq P^*(A)=Pl(A)$.

Граничним випадком нечітких мір є міра можливості *Poss (possibility)* та міра необхідності *Ness (necessary)*. Для них виконуються рівності:

m(AYB)=max(m(A), m(B))=Poss,

m(AIB)=min(m(A), m(B))=Ness

Через те, що міра можливості є нечіткою мірою правдоподібності, а міра необхідності – мірою довір'я, то для них справедлива умова двоїстості:

$$\forall A \leq \square : Poss(A) = 1 - Ness(X \setminus A) \quad .(6)$$

Цей вираз стверджує, що подія необхідна, коли для неї протилежна подія неможлива. Мірам можливості відповідають стратегії оптиміста, мірам необхідності – стратегії песиміста.

Для нечітких мір існує взаємозв'язок:

Ness≤Bel≤P≤Pl≤Poss (7).

До того ж доведено, що нечітка міра є нечіткою мірою ймовірності тоді і тільки тоді, коли вона є одночасно мірою довір'я і мірою правдоподібності, тобто

Pl=Bell=P. (8)

Нечіткі міри можна також будувати на засадах функції міри фокальних елементів, що були визначені в п. 1.1.

Означення 2. Функцією міри фокальних елементів називають функцію, що визначена на підмножині *Ep* і задовольняє умові

$$\sum_{p=1}^{N} m(E_p) = 1 \ \forall p \ \text{із} \ m(E_p) > 0, \ p = \overline{1, N} \quad .(9)$$

У (9) величину m(Ep) розуміють як величину ймовірності сукупності елементарних подій, що становлять Ep, причому тут роблять застереження на розподіл величини m(Ep) за елементарними подіями. Підмножини Ep відображають неточність спостережень, а m(Ep) відображає ступінь впевненості, віднесеної до множини A в цілому. Тоді

$$Bel(A) = \sum_{E_p \subseteq A} m(E_p) \quad , (10)$$

$$Pl(A) = \sum_{E_p \cap A \neq 0} m(E_p) \quad . (11)$$

Для випадку ймовірнісної міри всі фокальні елементи – точкові множини, тобто в геометричній інтерпретації всі маси повинні бути закріплені за точками *{xi}* і не мають можливості переміщуватися. Тут

$$p(x_i) = m(\{x_i\}), \quad \sum_{x_i \in X} p(x_i) = 1 \cdot (12)$$

Звідси випливає, що теорія ймовірності вивчає один із часткових видів невизначеності, коли всі елементи множини *X* розрізняльні – серед них немає хоча б двох таких, до яких однозначно прикладена одна і та ж сама маса впевненості.

Другий важливий випадок нечіткої міри – це розподіл густини нечіткої міри можливості, що визначає функцію належності нечіткої множини:

$\mu(x)=Poss(x)$. (13)

Наявність цього чинника посприяла появі нової науки – теорії можливості.

2.1. Нечіткі інтеграли та їх обчислення для скінченних множин.

Для обробки нечіткої інформації, що формалізована у вигляді розподілу нечітких мір, найбільш прийнятним є використання нечіткого інтеграла [2, 3]. Його побудова споріднена з інтегралом Лебега. Тому нечіткий інтеграл часто називають *нечітким сподіваним значенням* (*FEV – Fuzzy Expected Value*).

Означення 3. Нечіткий інтеграл від функції h:X→[0,1] на множині за нечіткою мірою *g* визначається як

$$\int_A h(x) \circ g = \sup_{\alpha \in [0,1]} \min(\alpha, g(A \cap H_\alpha)), \quad (14)$$

де $H_\alpha \{x \mid h(x) \geq \alpha\}$.

Нечіткий інтеграл володіє властивістю медіани, а залежновід вибору нечіткої міри, за якою здійснюється інтегрування, забезпечує реалізацію всіх відомих на сьогодні стратегій прийняття рішень, починаючи від можливості Poss і закінчуючи необхідністю Ness. Окрім того, за нечіткого інтегрування здійснюється заміна арифметичних операндів (+, x) на максимінний базис ($\wedge$, $\vee$), що унеможливлює появу некоректності при обробці нечітких чисел.

Очевидно, для обчислення НІ (13) необхідно мати метод отримання нечітких мір для довільних множин Х. Це, по-перше, можна здійснити на засадах наступного λ-правила, розробленого Сугено.

Нехай A, B$\subseteq$B, AI B=. Тоді нечітку міру визначимо як міру, що задовольняє такому співвідношенню:

$G_\lambda(AYB)= g_\lambda(A) + g_\lambda(B) + \lambda g_\lambda(A) \text{ x } g_\lambda(B), -1<\lambda<\infty$. (15)

Для випадку, коли вираз $AYB = X$ (14) нормування g_λ –мір. Очевидно, що $g_\lambda(X)=1$, а $g_\lambda(\varnothing)=0$. Параметр λ, що в (15), називається параметром нормування g_λ-міри. Коли $\lambda>0$, $g_\lambda(AYB)> g_\lambda(A)+g_\lambda(B)$, $-1<\lambda<0$, $g_\lambda(AYB)<g_\lambda(A)+g_\lambda(B)$, тобто маємо клас суперадитивних мір (мір довір'я), а коли, одержимо клас субадитивних мір (мір правдоподібності).

Нехай задана скінченна множина

$X = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ (16)

і кожному елементу $x_i \in X$ відповідають значення густин g_i із $0\le g_i \le 1$ та часткових оцінок h_i, що також задовольняють умові $0\le h_i \le 1$, $i=1,n$. Тоді для обчислення *HI*, перш за все, необхідно обчислити параметр λ. Для цього потрібно розв'язати відносно λ алгебраїчне рівняння n-ї степені $\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda g_i)=1+\lambda$.(17)

Тоді $HI=S$ знаходиться за правилом

$S = \sup_{\alpha\in[0,1]}(\alpha \wedge g_\alpha)$,(18)

де $g_\alpha = \frac{1}{\lambda}\left(\prod_{i\in\Theta_\alpha}(\lambda g_i+1)-1\right)$, $\Theta_\alpha = \{i \mid h(x_i)\ge\alpha\}$.(19)

У випадку (16) для обчислення (14) можна також користуватися мірою Цукамото g_v. У цьому випадку умова нормування (аналог (16)) має такий вигляд:

$(1-\nu)\bigvee_{i=1}^{n} g_i + \nu\sum_{i=1}^{n} g_i = 1$.(20)

Обчисливши з рівняння (20) значення за формулою (18), де

$g_\alpha = (1-\nu)\bigvee_{i\in\Theta_\alpha} g_i + \nu\sum_{i\in\Theta_\alpha} g_i$, $\Theta_\alpha = \{i \mid h(x_i)\ge\alpha\}$,(21)

знаходимо нечіткий інтеграл.

Зауважимо, що користуватися формулою (20) доцільніше, аніж формулою (16), оскільки (20) є лінійним рівнянням відносно v.

2.2. Застосування нечітких мір та інтегралів до розв’язання слабко структурованих задач економіки.

Задача 1. (*гнучке оцінювання ресурсу*). Нехай виробник упевнений у тому, що йому необхідно забезпечитися сировиною b з високою надійністю та з передбачуваною (стабільною) ціною. Але він також вважає, що йому варто купити і наступні обсяги цієї сировини, аж до $b+d$. Але це він може досягнути за більш високої ціни, причому різним відхиленням від b приписуються різні межі допустимості (ступені важливості): чим більше відхилення, тим менша міра допустимості.

Нехай функції h та міра g зображені на рис. 3.

Аналітичний вигляд цих функцій такий:

$$g(x)=\begin{cases}1, & \text{якщо } x\le 10,\\ 1-\dfrac{x-10}{40}, & \text{якщо } 10<x<50,\\ 0, & \text{якщо } x\ge 50.\end{cases}\qquad h(x)=\frac{1}{1+\left(\dfrac{x-30}{2}\right)^2}.$$

Для обчислення інтеграла (14) необхідно відшукати ординати точок $A_1(x_1,\alpha_1)$, $A_2(x_2,\alpha_2)$, $A_3(x_3,\alpha_3)$ ламаної прямої $g(x)$ та кривої $h(x)$. Це приводить до знаходження коренів кубічного рівняння.

$400\alpha^2-400\alpha^2+100\alpha-1=0$

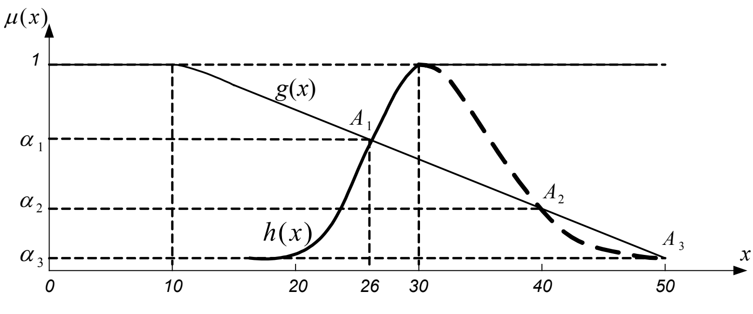

Рис. 3. Геометрія обчислення нечіткого інтеграла

Наближені їх значення: $\alpha_1=0,60$; $\alpha_2=0,42$; $\alpha_3=0,01$. Тому нечіткий інтеграл (*HI*) дорівнює:

$HI=max(0,60; 0,42; 0,01)=0,6$.

Отже, виробнику вигідно закупити Х=26 (у.о.) сировини.

Вираз (16) є певною множиною показників, які нечітко описують деякі об’єкти, наприклад, дім, обличчя, екскурсійний регіон, економічний проект, трудовий потенціал, підприємство тощо. Дім можна оцінити через такі показники, як x_1 – площа, x_2 – вигоди, x_3 – навколишнє середовище, x_4 – вартість, x_5 – час, необхідний на дорогу до місця праці.

Можна також на підставі нечітких мір та інтегралів оцінити приваби екскурсійних регіонів, які можна охарактеризувати через такі показники: мальовничість природи та специфічність ландшафту – x_1; сприятливе екологічне середовище – x_2; наявність культурних та духовних осередків – x_3; етнографічна своєрідність – x_4; архітектурні пам'ятки – x_5; кліматичні умови – x_6; місця, пов'язані з історичними подіями та постатями – x_7; можливість спостереження за життям тварин та рослин – x_8; якісний сервіс – x_9.

Як бачимо, множина X не обов'язково повинна бути множиною фізичних показників, вона може бути множиною думок, критеріїв тощо.

Вважатимемо, що нечітка міра $g_i=g(x)$ виражає ступінь важливості показника x_i, коли оцінюють об'єкт, а $h_i=h(x_i)$ – оцінка показника x_i. Необхідно зауважити, що ступінь важливості всієї множини X дорівнює 1. На практиці $h(x)$ визначають об'єктивно і суб'єктивно. Очевидно, що

$$0 \le g_i \le 1,\ 0 \le h_i \le 1,\ i = \overline{1,n}\,.$$

Обчислюючи нечіткий інтеграл від h за мірою g, одержимо загальну оцінку об'єкта. Вирази (14), (18) – це згортка n часткових оцінок. Він може бути дуже корисним, коли існує взаємозалежність показників, що є характерним для більшості задач вибору в нечітких умовах.

Задача 2. (оцінка трудового потенціалу області). Охарактеризуємо трудовий потенціал такими показниками: x_1 – наявність сільського населення; x_2 – природний приріст населення; x_3 – питома вага населення працездатного віку; x_4 – питома вага економічно неактивного населення працездатного віку; x_5 – рівень зайнятості всього населення; x_6 – освітянсько-кваліфікаційний рівень; x_7 - здоров'я; x_8 – мотиваційні настанови до праці. Дослідження проведено для трьох мір:

рівномірно-ймовірнісної $P=(0{,}125;\ 0{,}125;\ ...;\ 0{,}125)$;

можливості $Poss=(1;\ 0{,}6;\ 0{,}7;\ 0{,}2;\ 0{,}9;\ 0{,}6;\ 0{,}9;\ 0{,}6)$;

Цукамото $gv=(0{,}2;\ 0{,}1;\ 0{,}15;\ 0{,}05;\ 0{,}15;\ 0{,}1;\ 0{,}05;\ 0{,}1)$.

Для всіх цих мір приймемо однакову оцінку показників $x_1 \div x_8$:

h=(0,8; 0,6; 0,7; 0,3; 0,8; 0,6; 0,3; 0,7)

Для перших двох мір одержимо, відповідно, такі значення нечітких інтегралів: $S_1=0{,}6;\ S_2=0{,}8$. Для третьої міри:

$$\nu = \frac{1-0{,}2}{0{,}9-0{,}2} \approx 1{,}143 \quad .$$

Для обчислення НІ візьмемо такі значення величини α: 0,8 та 0,7. Тоді

$g_{0,8}=(1-1,143)\text{x}0,2+1,143\text{x}(0,2+0,15)=0,37145;$

$g_{0,7}=(1-1,143)\text{x}0,2+1,143\text{x}(0,2+0,15+0,15+0,1)=0,6572$

Отже, в цьому випадку S=0,7∧0,6572=0,6572.

Таким чином, оцінка трудового потенціалу залежить від вибору міри інтегрування.

На засадах нечіткої статистики розроблена

– система оцінювання якості дипломного проектування;

– система оцінювання кредитоспроможності інноваційних проектів;

– за аналогією із класичним аналогом економетрії проведена оцінка схожих об’єктів, що дозволяє, наприклад, через оцінювання наявних екскурсійних маршрутів спрогнозувати їх зміну на найближчі роки.

На завершення викладу доречно зробити такий висновок: якщо ймовірнісна міра разом з інтегралом Лебега була і є важливим етапом використання математики до економічних потреб, то від впровадження у цю царину нечітких мір та інтегралів слід очікувати певного зближення результатів як теоретичного, так і практичного характеру. Математичний підхід починає нагадувати безпосередні міркування людини.

Література

1. Козелецкий Ю. Психологическая теория решений. – М.: Прогресс, 1979. – 504 с.

2. Sugeno M. Fuzzy measure and fuzzy integral. – Trans. SICE, 1972. – V. 8. – No2. – P. 95-102.

3. Tsukamoto Y. Identification of preference measure by means of fuzzy integrals. – Ann. Conf. of JORS, 1972. – P. 131-135.

4. Shafer G.A. Mathematical theory of Evidence. – Princeton: Prince5. ton Univ. Press, 1976. – 297 p.

6. Dubois D., Prade H. Unfair Coins and Necessity Measures: Towards a Possibilistic Interpretation of Histograms // Fuzzy Sets a Systems. – 1983. – Vol. 10, No1. – P. 15-20.

7. Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике. – М: Радио и связь. – 1990. – 288 с.