

Пастушок Г.С.

### Логічні прийоми формування математичних понять.

Одним із основних завдань навчання є формування наукового, свідомого, однозначного розуміння кожного поняття, а також системи понять у певній науці. Учні повинні розуміти і пояснювати зміст і обсяг понять, їх зв'язки з іншими поняттями в структурі навчального предмету, використання на практиці та в суміжних науках, вміти розповісти про спосіб їх здобування.

Встановлено, що для засвоєння понять обов'язкові такі три дії:

- 1) підведення до поняття,
- 2) вибір необхідних та достатніх ознак для впізнання об'єкту,
- 3) виведення наслідків про належність чи неналежність предмету до поняття.

Ці дії носять загальнопізнавальний характер, тобто вони необхідні для засвоєння будь-яких понять. Окрім того поняття повинні формуватись не ізольовано один від одного, якщо знаходяться один з одним у певних відношеннях. Якщо це відсутнє, то виведення наслідків не може привести до позитивного результату. Це тому, що даний процес часто направлений на виявлення властивостей одного поняття у властивостях іншого. Наприклад: потрібно побачити у властивості середньої лінії трикутника одну з достатніх умов паралельності відрізків або прямих; всі властивості паралелограма потрібно виділити у ромба, прямокутника. Крім того, при виведенні наслідків виявляються такі властивості, які є результатом вказаних в умові взємодій об'єктів, які відносяться до різних понять. Наприклад: медіана, проведена з вершини до основи, лише в рівнобедреному трикутнику є бісектрисою і висотою; кут, вписаний у коло, прямих лише в тому випадку коли він спирається на діаметр; у прямокутному трикутнику висота, опущена з вершини прямого кута на гіпотенузу, є середня пропорційна величина.

Головними суттєвими компонентами у оволодінні поняттями є:

- 1) засвоєння певної системи знань про поняття;
- 2) оволодіння спеціальною операційною системою дій (підведення під поняття, вибір необхідних і достатніх ознак для впізнання об'єкту, виведення наслідків);
- 3) встановлення системи понять і їх

родо-видових відношень всередині системи, взаємозв'язку їх ознак;

- 4) розкриття генезиса понять.

Процес формування понять розрізняє репродуктивний і продуктивний шлях. Під час формування понять репродуктивним шляхом пояснюють закономірності явищ, процесів, зв'язків між ними, вводять назву для певної закономірності або об'єкта з виділеними властивостями, формулюються означення введеного поняття, потім вимагається від учнів повторити означення та навести приклади з практики. Такою схемою формування понять користуються тоді, коли вивчають зовсім незнайомі поняття або коли учні не підготовлені до творчого методу здобування знань.

Для забезпечення розвитку продуктивного мислення використовується складніша схема:

- 1) спостереження об'єктів, явищ, процесів;
- 2) виділення у кожному об'єкті або процесі їх ознак і властивостей;
- 3) розпізнавання цих ознак у інших об'єктах;
- 4) виділення класів об'єктів з однаковими ознаками і властивостями;
- 5) опис спільних ознак об'єктів;
- 6) виділення істотних ознак, що визначають клас об'єктів;
- 7) введення назви (терміна);
- 8) формулювання означення;
- 9) визначення області існування введеного поняття;
- 10) пошуки зв'язків з іншими поняттями.

Означення поняття - це (в найширшому розумінні) логічна операція, в процесі виконання якої розкривається зміст поняття. Таким чином поняття фіксує у свідомості лише суттєві для цього випадку ознаки і властивості (які є ознаками даного поняття). Тобто це форма мислення, в якій відображено суттєві властивості об'єктів вивчення.

Кожне поняття розглядають за змістом та обсягом. Зміст поняття - це множина всіх суттєвих ознак даного поняття. Обсяг поняття - множина об'єктів, до яких застосовується дане поняття. Наприклад: для поняття "паралелограм" зміст можливо представити такими властивостями:

- 1) протилежні сторони рівні;
- 2) протилежні кути рівні;
- 3) діагоналі в точці перетину діляться пополам і т.д.

Обсяг поняття "паралелограм" представлений множиною таких чотирикутників, як: 1) паралелограм; 2) ромб; 3) прямокутник; 4) квадрат. Наведений приклад показує, що зміст поняття - це множина ознак поняття, з яких кожен є необхідним, а всі разом достатніми для

встановлення поняття.

Зміст поняття чітко визначає його обсяг, і, навпаки, обсяг поняття визначає його зміст. Таким чином, зміни у змісті поняття приводять до змін його обсягу і навпаки. Між змістом та обсягом існує в деякій мірі обернена залежність. Так, наприклад, якщо збільшити зміст поняття "паралелограм" (діагоналі взаємно - перпендикулярні), то одразу зменшиться його обсяг (залишиться лише ромб і квадрат). Якщо зменшити міст цього поняття (взяти до уваги паралельність лише двох протилежних сторін), то збільшиться його обсяг (до названих вище чотирикутників добавиться трапеція).

Якщо обсяг одного поняття ( $n_1$ ) підпорядкований обсягу іншого поняття ( $n_2$ ) ( $V_{n_1} \subset V_{n_2}$ ), то друге поняття ( $n_2$ ) називається родовим по відношенню до першого, а перше поняття ( $n_1$ ) називається видовим по відношенню до другого. Наприклад: поняття ромба - видове поняття по відношенню до поняття паралелограм, а поняття паралелограм - родове по відношенню до поняття ромба.

Процес розкриття змісту поняття полягає у визначенні всіх його ознак. Формування необхідних та достатніх ознак поняття, зведених у зв'язне речення (мовне або символічне), є означення поняття (математичного об'єкту). Кожна з ознак, які входять в означення, повинні бути необхідні, а всі разом - достатні для встановлення даного поняття. В означенні потрібно розкрити основний зміст поняття.

Приклад 1. Правильне означення поняття. "Паралелограм - чотирикутник, у якого дві протилежні сторони попарно рівні і паралельні".

Приклад 2. Недостатнє означення. "Квадрат - паралелограм, у якого всі кути прямі".

Приклад 3. Означення містить зайві властивості. "Квадрат - паралелограм з рівними сторонами і чотири прямі кути".

Визначення кожного поняття можна розглядати в динаміці, тобто у вигляді процесу зведення одного поняття до іншого. Послідовність кроків тут скінченна, оскільки, продовжуючи цей процес, ми обов'язково прийдемо до понять, які вважають початковими.

У послідовності понять, які отримані в результаті процесу визначення деякого поняття, кожне поняття, починаючи з другого, є родовим для попереднього, тобто обсяги цих понять знаходяться між собою у послідовному відношенні включення і  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ . Наприклад: квадрат - ромб - чотирикутник - багатокутник - геометрична фігура - множина точок.

Таким чином ми приходимо до основних

понять. У процесі навчання такі поняття повинні бути особливо виділені, а сприйняття їх в якості основних мотивовано.

Поняття може бути правильно визначене різними способами.

1) Через найближчий рід та видову відмінність. Це логічний прийом, який зводиться до відшукування найближчого роду для означуваного поняття і певних ознак, притаманних лише розглядуваному виду предметів і відсутність у всіх інших видів предметів, що належать цьому роду. На мові теорії множин і математичної логіки зміст цього способу визначення поняття визначений у наступному: якщо у множині  $A$  є елементи  $x$ , які мають властивості  $P(x)$ , і елементи, які не мають даних властивостей, то дана властивість  $P(x)$  розбиває множину  $A$  на дві підмножини:

$$A_1 = \{x / x \in A \wedge P(x)\}, A_2 = \{x / x \in A \wedge \overline{P(x)}\}$$

при чому  $A_1 \cap A_2 = \emptyset, A_1 \cup A_2 = A$ .

Тут множина  $A$  є множина об'єктів, які належать родовому поняттю, а властивість  $P$  є видовою ознакою (видова відмінність) даного поняття. Приклад: "Квадрат - це прямокутник, у якого всі сторони рівні". Прямокутник - родова ознака, рівність сторін - видова.

2) Контекстуальне. Ґрунтується на зв'язуванні зв'язку між означуваним поняттям і контекстом, в якому воно міститься.

3) Реальне. Звичайною мовою відбиває істотні ознаки і властивості даного об'єкта, які відрізняють його від усіх інших об'єктів.

4) Генетичне. Опис способу побудови поняття.

5) Номінальне. Дає пояснення значення розглядуваного терміна за допомогою іншого.

Визначаючи рівень засвоєння понять та формулювання означень, можна запропонувати такі запитання:

1) Які істотні ознаки поняття?

2) Чим відрізняються істотні ознаки від неістотних?

3) Які поняття використанні для означення даного? Дайте їх означення.

4) Назвіть приклади, що належать до області існування поняття.

5) Яким способом можна сформувати поняття?

6) Які прийоми при цьому використовувались?

7) Запишіть означення прийнятими умовними позначеннями...