

УДК 361+519

**Топішко Н. П.,***старший викладач кафедри економічної теорії Національного університету  
“Острозька академія”*

## МЕТОДИКА ОЦІНКИ РІВНЯ ОСОБИСТОГО СОЦІАЛЬНОГО ЗАХИСТУ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ТЕОРІЇ НЕЧІТКИХ МНОЖИН

*Судження окремої людини про особисту соціальну захищеність мають суб'єктивний характер. Із врахуванням цього запропоновано методика оцінки рівня особистого соціального захисту на основі використання нечіткої логіки.*

**Ключові слова:** лінгвістична змінна, нечіткі множини, соціальний захист населення.

*Суждения отдельного человека о личной социальной защищенности имеют субъективный характер. С учетом этого предложена методика оценки уровня личной социальной защиты на основе использования нечеткой логики.*

**Ключевые слова:** лингвистическая переменная, нечеткие множества, социальная защита населения.

*Every single person's judgment about personal social protection has subjective character. While taking into consideration this fact the new methodology of evaluation of the level of personal social protection on the background of vague plurals has been represented.*

**Key words:** linguistic mutable, vague plurals, social protection of the population.

**Постановка проблеми.** Необхідність функціонування системи соціального захисту населення (СЗН) обумовлено вірогідністю випадкових, незалежних від волі людини подій, що загрожують її нормальному відтворенню і життєдіяльності. Непередбаченість (невизначеність) як об'єктивна форма існування оточуючого нас світу є наслідком зміни зовнішніх і внутрішніх умов функціонування соціально-економічної системи, її складності та динамічності. Такі події приймають форму ризиків, у т. ч. соціальних. Оптимізаційну функцію системи СЗН вбачають у їх зменшенні [1, с. 99]. Важливо розробити систему оцінки рівня СЗН, у т. ч. особистого. Останнє передбачає застосування системи об'єктивних оцінок, заснованих на відповідності чинним соціальним стандартам, і суб'єктивних, що передбачає не тільки кількісні, а й якісні оцінки рівня

соціальної захищеності і які вимірити важко. У цьому випадку доцільним є застосування теорії нечітких множин [2].

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** Нечіткі множини є предметом наукового дослідження багатьох зарубіжних та вітчизняних науковців, зокрема Р. Беллмана, Л. Заде, А. Кофмана, О. Леоненкова, Т. Сааті, М. Сявавка, С. Штовби та ін. [3-10]. Перспективним і зовсім недослідженим є застосування нечіткої логіки в оцінці рівня соціального захисту населення.

**Метою** статті є розробка економіко-математичної моделі оцінки рівня особистого соціального захисту в умовах невизначеності.

**Виклад основного матеріалу.** Визначальна роль у встановленні оцінки рівня особистого соціального захисту належить судженням людини, які мають суб'єктивний характер. Для цього людина активно використовує лінгвістичні змінні – слова або словосполучення природної або штучної мови. Це поняття вперше було введено фундатором теорії нечітких множин Л. Заде.

Нехай  $R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$  – множина оцінок рівня особистої соціальної захищеності, до яких буде застосовано експертну систему "Fuzzy Logic Toolbox".

$P = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$  – множина кількісних та якісних критеріїв, за якими буде здійснюватися оцінка рівня особистої соціальної захищеності.

В теорії нечітких множин для моделювання об'єктів із дискретним виходом часто використовують нечітке логічне виведення, яке задається лінгвістичними висловлюваннями  $\langle \text{IF } A, \text{ THEN } B \rangle$  або  $\langle \text{Якщо } A \text{ – то } B \rangle$  і логічними операціями над нечіткими множинами. Причому  $A$  і  $B$  – це певні вирази нечіткої логіки, що найчастіше можуть приймати форму нечітких висловлювань. Сукупність таких нечітких правил складає нечітку базу знань про взаємозв'язок входів та виходів об'єкта і має вигляд:

IF <посилання правила>, THEN <заключення правила> або  
ЯКЩО <посилання правила>, ТО <заклучення правила>.

Багатовимірні залежності "входи-виходи" задаються нечіткими правилами з логічними операціями "ТА" і "АБО".

Взаємозв'язок показників рівня особистої соціальної захищеності можна представити наступним чином:

$$S = f_s(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5), \quad (1)$$

де  $S$  – інтегральна оцінка рівня особистої соціальної захищеності;

$P_1$  – стан здоров'я;

$P_2$  – забезпеченість житлом;

$P_3$  – рівень освіти;

$P_4$  – розмір особистого доходу;

$P_5$  – зайнятість особи.

Результатом розв'язку задачі є вихідна змінна – інтегральна оцінка рівня соціального захисту особи, яка може прийняти одне з наступних значень:

–  $s_1$  – низький рівень особистого соціального захисту;

–  $s_2$  – рівень особистого соціального захисту нижче за середній;

- $s_3$  – середній рівень особистого соціального захисту;
- $s_4$  – рівень особистого соціального захисту вище за середній;
- $s_5$  – високий рівень особистого соціального захисту.

Багатокритеріальний аналіз оцінок рівня особистої соціальної захищеності проведемо із використанням алгоритму Мамдані, який описується наступним чином:

- створюється база правил системи нечіткого виведення;
- проводиться фазифікація вхідних змінних;
- здійснюється операція агрегування;
- акумулюються заключения нечітких правил;
- відбувається дефазифікація вхідних змінних.

Значення вхідних і вихідних змінних задані нечіткими множинами:

$$(p_1 = \tilde{b}_{1j} \Theta_j p_2 = \tilde{b}_{2j} \Theta_j \dots \Theta_j p_n = \tilde{b}_{nj} \text{ з вагою } w_j) \Rightarrow S = \tilde{x}_j, j = \overline{1, m}, \quad (2)$$

де  $\tilde{b}_{ij}$  – нечіткий терм, яким оцінюється змінна  $p_i$  в  $j$ -му правилі,  $j = \overline{1, m}$ ;

$\tilde{x}_i$  – заключения  $j$ -го правила;

$m$  – кількість правил у базі знань;

$\Theta$  – логічна операція, яка пов'язує фрагменти посилання  $j$ -го правила;

$\Rightarrow$  – нечітка імплікація.

Для подальших розрахунків введемо такі позначення:

–  $\mu_j(p_i)$  – функція належності входу  $p_i \in [p_i^-, p_i^+]$  нечіткому терму  $\tilde{b}_{ij}$ , тобто

$$\tilde{b}_{ij} = \int_{p_i \in [p_i^-, p_i^+]} \mu_j(p_i) / p_i;$$

–  $\mu_{xy}(r)$  – функція належності виходу  $r \in [r^-, r^+]$  нечіткому терму  $\tilde{x}_j$ , тобто

$$\tilde{x}_j = \int_{r \in [r^-, r^+]} \mu_{xy}(r) / r.$$

Розрахуємо ступінь виконання посилання  $j$ -го правила для поточного вхідного вектора  $P = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*)$  наступним чином:

$$\mu_j(P^*) = w_j (\mu_j(p_1^*) p_j \mu_j(p_2^*) p_j \dots p_j \mu_j(p_n^*)), j = \overline{1, m}, \quad (3)$$

де  $p_i$  означає  $t$ -норму, якщо в  $j$ -му правилі бази знань використовується логічна операція ТА ( $\Theta_j = TA$ ), і відповідає  $s$ -нормі при ( $\Theta_j = ABO$ ).

Трикутні норми у нечіткому виведенні Мамдані переважно є операціями мінімуму ( $t$ -норма) і максимуму ( $s$ -норма).

Результат нечіткого виведення набуде вигляду:

$$\tilde{r}^* = \left( \frac{\mu_1(P^*)}{\tilde{x}_1}, \frac{\mu_2(P^*)}{\tilde{x}_2}, \dots, \frac{\mu_m(P^*)}{\tilde{x}_m} \right). \quad (4)$$

Проведемо операції імплікації та агрегування, що дають змогу перейти від нечіткої множини, де носієм виступає множина нечітких термів

$\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m\}$  до нечіткої множини на носії  $|\underline{r}, \bar{r}|$ . Застосувавши логічне виведення по  $j$ -му правилу бази знань ми отримуємо наступне нечітке значення вихідної змінної  $r$ :

$$\tilde{x}_j^* = \text{imp}(\tilde{x}_j, \mu_j(P^*)), j = \overline{1, m}, \quad (5)$$

де  $\text{imp}$  – імплікація, що в нечіткому виведенні переважно реалізується операцією мінімуму, тобто відбувається "зрізування" функції належності  $\mu_{x_j}(r)$  по рівню  $\mu_j(P^*)$ , що набуває наступного математичного вигляду:

$$\tilde{d}_j^* = \int_{y \in [\underline{y}, \bar{y}]} \min(\mu_j(P^*), \mu_{d_j}(y)) / y, \quad (6)$$

Агрегування нечітких множин дозволяє отримати загальний результат логічного виведення по всій базі знань:

$$\tilde{r}^* = \text{agg}(\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*, \dots, \tilde{x}_m^*), \quad (7)$$

де  $\text{agg}$  – агрегування нечітких множин, через яке реалізують операції максимуму.

Дефазифікацію нечіткої множини  $\tilde{r}$  називається чітке значення виходу  $r$ , яке відповідає вхідному вектору  $P^*$ .

Використання обчислювальної системи MATLAB (пакет Fuzzy Logic Toolbox) дозволяє здійснити автоматизацію розрахунків оцінки рівня особистої соціальної захищеності на базі нечіткої логіки, а саме: задати кількість входів та виходів системи, встановити її тип; встановити метод дефазифікації та реалізації логічних операцій; задати терми для лінгвістичної змінної, тип та параметри функцій належності кожного терма; задати правила в лінгвістичному, логічному та індексному форматах, проводити їх редагування; отримати візуалізацію нечіткого виведення за кожним правилом; встановити результуючу нечіткої множини, провести її дефазифікацію тощо. Користувач завжди має можливість моделювати ситуацію за допомогою Fuzzy Logic Toolbox, виходячи із поставленого завдання (у відповідності до варіації вхідних змінних або бажаного вихідного результату).

Задамо нечіткі множини значень критеріїв оцінки рівня особистої соціальної захищеності: стан здоров'я ( $P_1$ ), забезпеченість житлом ( $P_2$ ), рівень освіти ( $P_3$ ), розмір особистого доходу ( $P_4$ ), зайнятість особи ( $P_5$ ) (табл. 1).

Перетворення лінгвістичної інформації у формат, в якому вона може використовуватися обчислювальною системою MATLAB, передбачає побудову функцій належності. Вони можуть набрати вигляду трикутної, трапецевидної, Z- чи S-подібної та інших типів функцій належності [5].

Найбільш поширеними функціями належності є трикутні та трапецевидні, що найчастіше використовуються для подання значень лінгвістичних змінних. Вони застосовуються для опису таких властивостей множин,

які окреслюють невизначеність наступного типу: “подібне значення”, “середнє значення”, “приблизно рівні”, “середній рівень доходів” тощо.

*Таблиця 1*  
*Значення нечітких термів та нечітких множин для показників P1– P5\**

<b>Змінна</b>	<b>Нечіткий терм, яким оцінюється змінна</b>	<b>Нечітка множина значень, що відповідає нечіткому терму</b>
Стан здоров'я (P1)	Надто слабкий	Інвалідність
	Слабкий	Хронічні захворювання
	Задовільний	Відсутні хронічні захворювання
	Добрий	Хворів менше 3 разів на рік
Забезпеченість житлом (P2)	Низька	Немає власного помешкання (найм)
	Середня	Надано гуртожиток
	Висока	Є власне помешкання
Рівень освіти (P3)	Низький	Середня
	Середній	Професійно-технічна
	Високий	Вища
Розмір особистого доходу (P4)	Низький	0-1100 грн
	Середній	1050-1600 грн
	Високий	1500 грн до $\infty$
Зайнятість особи (P5)	Відсутня	Безробітна особа
	Тимчасова	Наявна тимчасова робота
	Постійна	Наявна постійна робота

\*Джерело: складено автором.

Аналітично трикутну функцію можна задати наступним виразом:

$$f\Delta(x; a, b, c) = \left. \begin{array}{l} 0, x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, b \leq x \leq c \\ 0, c \leq x \end{array} \right\}, (8)$$

де  $a, b, c$  – деякі числові параметри, що приймають довільні дійсні значення і впорядковані відношенням:  $a \leq b \leq c$ .

Відповідно трапецевидну функцію аналітично можна задати таким чином:

$$f_T(x; a, b, c, d) = \left. \begin{cases} 0, x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, a \leq x \leq b \\ 1, b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, c \leq x \leq d \\ 0, d \leq x \end{cases} \right\}, (9)$$

де  $a, b, c, d$  – деякі числові параметри, що приймають довільні дійсні значення і впорядковані відношенням:  $a \leq b \leq c \leq d$ .

$Z$ -подібна функція належності використовується для опису таких властивостей нечітких множин, які характеризуються невизначеністю типу: "низький рівень зайнятості", "мала кількість", "невелике значення", "низький рівень доходів" тощо. Аналітично дана функція належності може бути задана наступним чином:

$$f_{Z_1}(x; a, b) = \left. \begin{cases} 1, x < a \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{x-a}{b-a} \pi\right), a \leq x \leq b \\ 0, x > b \end{cases} \right\}, (10)$$

де  $a, b$  – деякі числові параметри, що приймають довільні дійсні значення і впорядковані відношенням:  $a < b$ .

$S$ -подібна функція застосовується для подання таких нечітких множин, які характеризуються невизначеністю типу: "велика кількість", "високий рівень цін", "значна величина", "висока якість послуг" тощо.

$S$ -подібна функція належності аналітично може бути задана таким виразом:

$$f_{S_1}(x; a, b) = \left. \begin{cases} 0, x < a \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{x-b}{b-a} \pi\right), a \leq x \leq b \\ 1, x > b \end{cases} \right\}, (11)$$

де  $a, b$  – деякі числові параметри, що приймають довільні дійсні значення і впорядковані відношенням:  $a < b$ .

Сигмоїдальна функція належності може бути віднесена одночасно до  $S$ -подібних та  $Z$ -подібних функцій належності. Аналітичний вираз сигмоїдальної функції такий:

$$f_{S_3}(x; a, b) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-b)}}, (12)$$

де  $a, b$  – деякі числові параметри, що приймають довільні дійсні зна-

чення і впорядковані відношенням:  $a < b$ , а  $e$  – основа натуральних логарифмів, котре ініціює задання відповідної експоненціальної функції. Якщо  $a > b$ , то отримаємо S-подібну функцію належності. Якщо , то відобразиться Z-подібна функція належності.

Можливе також використання П-подібних функцій, до яких належить ціла низка кривих. Однією з них є П-подібна функція, що аналітично задається наступним чином:

$$f_{\Pi}(x; a, b, c, d) = f_s(x; a, b) \bullet f_z(x; c, d), \quad (13)$$

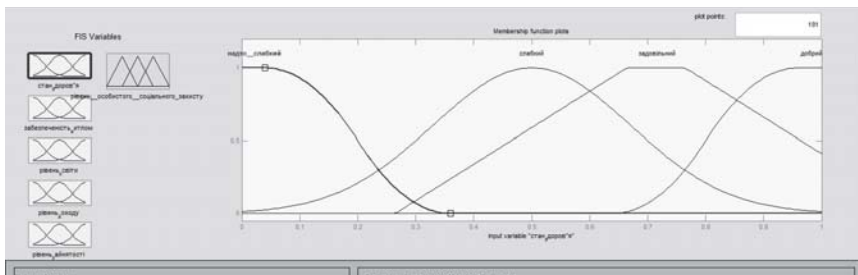
де  $a, b, c, d$  – деякі числові параметри, що приймають довільні дійсні значення і впорядковані відношенням:  $a \leq b < c \leq d$ . Знак “•” позначає арифметичне приведення значень відповідних функцій.

Ще однією із найбільш поширених П-подібних функцій є дзвоноподібна функція, яка аналітично задається виразом:

$$f_{\Pi}(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x - c}{a} \right|^{2b}}, \quad (14)$$

де  $a, b, c$  – деякі числові параметри, що приймають довільні дійсні значення і впорядковані відношенням:  $a < b < c$ , за умови, що  $b > 0$ . Функція  $|x|$  у цьому випадку означає модуль дійсного числа.

Побудуємо за алгоритмом нечіткого виведення Мамдані з допомогою Fuzzy Logic Toolbox функції належності для показників  $P_1$ - $P_5$  (рис. 1-5).



**Рис. 1. Функції належності показника  $P_1$ .** \*

\*Джерело: складено автором.

Функції належності першого з п'яти показників представлені таким чином: низькому значенню показника  $P_1$  відповідає z-подібна функція належності; нижче середнього – гауссова функція належності; середньому – трапецевидна функція належності; високому – s-подібна функція належності.

Розглянемо функції належності для показника  $P_2$  (рис. 2).

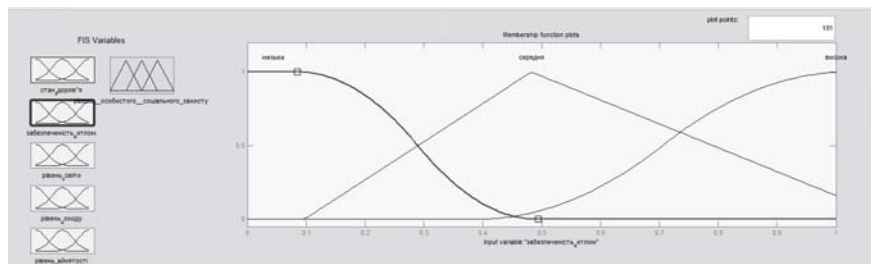


Рис. 2. Функції належності показника  $P_2$ . \*

\* Джерело: складено автором.

Відображення показника  $P_2$  на інтервалі низьких значень здійснено за допомогою z-подібної функції належності; середніх – трикутної функції належності; високих – s-подібної функції належності.

Показник  $P_3$  характеризують такі функції належності (рис. 3):

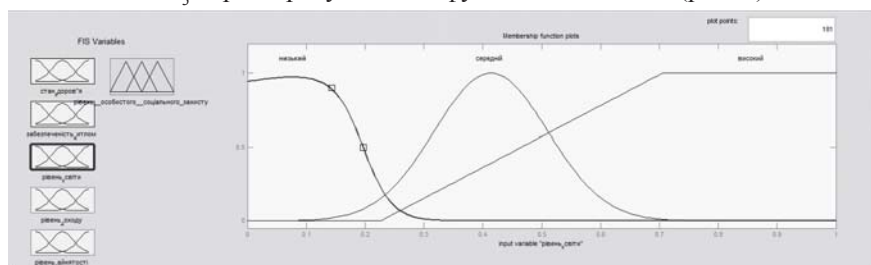


Рис. 3. Функції належності показника  $P_3$ . \*

\* Джерело: складено автором.

П-подібна функція, яка є різницею двох сигмоїдальних функцій, описує низькі значення для показника  $P_3$ , гауссова – середні, а трапецевидна – високі.

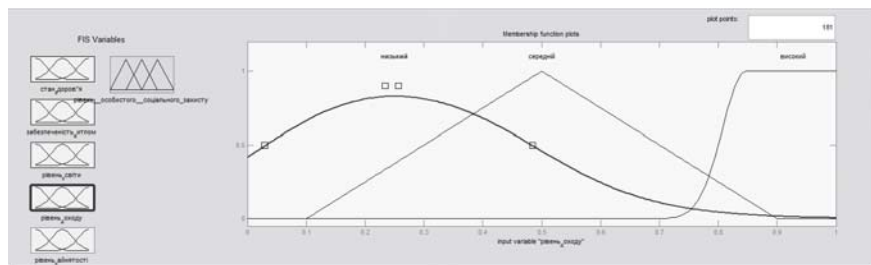


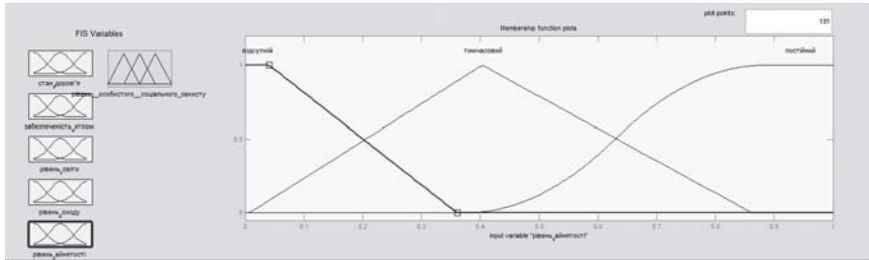
Рис. 4. Функції належності показника  $P_4$ . \*

\* Джерело: складено автором.



Як видно з рисунка 4, інтервал низьких значень показника  $P_4$  описує П-подібна функція належності, що є похідною двох сигмоїдальних функцій, середніх – трикутна, а високих – П-подібна функція, яка є комбінацією двох функцій Гаусса.

Останній з п'яти показників ілюструє такі функції належності: високому значенню показника  $P_5$  відповідає трапецевидна функція належності, середньому – трикутна і високому – s-подібна функція належності (рис. 5).



**Рис. 5. Функції належності показника  $P_5$ . \***

\*Джерело: складено автором.

Оцінка рівня особистої соціальної захищеності може отримати одну з наступних інтегральних оцінок (табл. 3).

*Таблиця 3*  
*Нечітка множина значень інтегральної оцінки рівня особистої соціальної захищеності\**

Оцінка рівня особистої соціальної захищеності	Нечітка множина значень вихідної змінної $\tilde{S}$
$r_1 \dots r_n$	Низький (0-25%)
	Нижче середнього (20-40%)
	Середній (35-65%)
	Вище середнього (60-80%)
	Високий (75-100%)

\*Джерело: складено автором.

Відобразимо взаємозв'язок входів та виходів у нечіткій базі через набір нечітких правил знань щодо оцінки рівня особистої соціальної захищеності. Кількість даних правил необмежена. Вважається, що чим більше нечітких правил буде задано, тим краще (рис. 6).

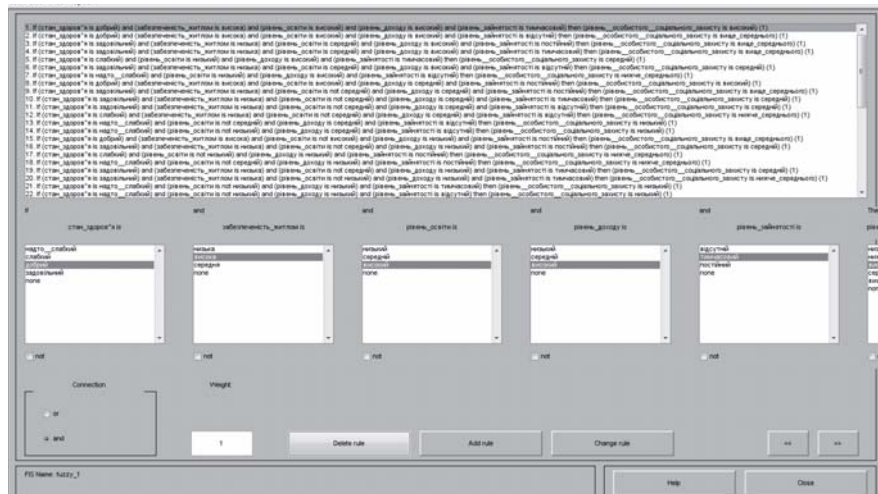


Рис. 6. Система логічних рівнянь

Здійснивши операції над нечіткими множинами отримуємо інтегральну оцінку рівня особистої соціальної захищеності, відображену чітким числом (рис. 7).

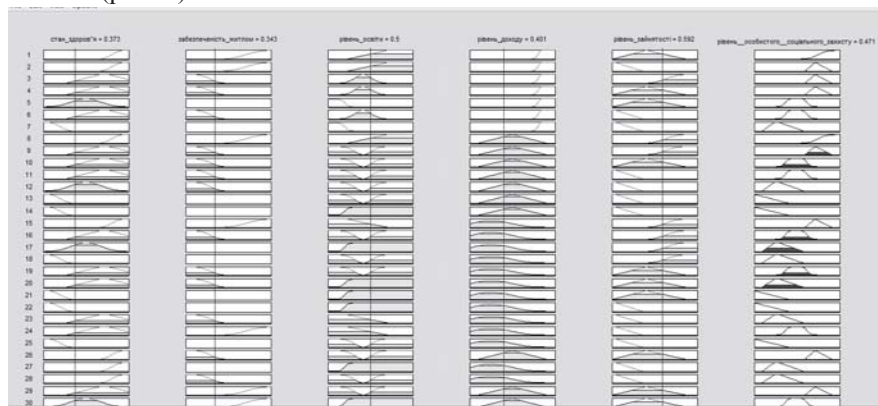


Рис. 7. Інтегральна оцінка рівня особистої соціальної захищеності. \*

\* Джерело: складено автором.

**Висновки.** Використання запропонованої економіко-математичної моделі дає змогу дослідити рівень особистої соціальної захищеності за кіль-

кісними та якісними критеріями, врахувати об'єктивні та суб'єктивні її оцінки. На нашу думку, це дозволить створити передумови для покращення соціального захисту населення в Україні.

### Література:

1. Борецька Н. П. Соціальний захист населення на сучасному етапі: стан і проблеми. Монографія. – Донецьк: Янтар, 2001. – 352 с.
2. Топішко Н. П. Застосування теорії нечітких множин в оцінці рівня соціального захисту населення // Наукові записки НУ “Острозька академія”, Серія “Економіка”, випуск 13. – Острог: НУ “Острозька академія”, 2010. – С. 467-480.
3. Bellman R. E., Zadeh I. A. Decision-Making in Fuzzy Environment // Management Science. – 1970. – Vol. 17. – № 4. – P. 141-160.
4. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств: Пер. с франц. – М.: Радио и связь, 1982. – 432 с.
5. Леоненков А. В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 736 с.
6. Саати Т. Л. Математические модели конфликтных ситуаций. Пер. с англ. / Под ред. И. А. Ушакова. – М.: Сов. радио, 1977. – 304 с.
7. Сявавко М, Рибичька О. Математичне моделювання за умов невизначеності. – Львів: НВФ “Українські технології”, 2000. – 320 с.
8. Сявавко М. С. Інформаційна система “Нечіткий експерт”. – Видавничий центр ЛНУ і. Франка, 2007. – 320 с.
9. Штовба С. Д. Проектирование нечетких систем средствами MATLAB. – М.: Горячая линия – Телеком, 2007. – 288 с.
10. Zadeh L. Fuzzy Sets // Information and Control. – 1965. – № 8. – P. 338-353.