Математика. Інформатика

Пасічник Я.А.

Логіко- психологічні основи структури математичних міркувань.

Рівень інтелектуального розвитку людини визначається рівнем її культури мислення і мовлення - рівнем уміння будувати логічно правильні міркування і висловлювати їх під час обґрунтування розв'язання певних навчальних чи життєвих завдань. Величезні можливості для формування культури мислення закладені в шкільному курсі математики, вивчення якого вимагає постійної роботи мозку і досягається шляхом логічних розміркувань, найчастіше дедуктивних міркувань. Проблема мислення і його розвитку - не нова і досліджувалась багатьма психологами та філософами. Однак висновки, що є результатами цих досліджень, майже не торкаються логічних основ структури мислення. Тому в даній статті зроблена спроба обґрунтувати процес мислення з точки зору традиційної логіки, розкрити структуру математичних міркувань, к сифікацію суджень, що є складовими частинами міркувань, та структуру силогізму, як однієї з форм міркування. Теоретичні положення, які стосуються структури математичних міркувань, успішно можуть використовуватися в процесі вивчення природознавства, фізики, хімії та інших навчальних предметів для формування в учнів уміння міркувати.

З точки зору психології, мислення - це активний процес відображення навколишнього світу в людському мозку у формі понять, суджень, умовиводів, який розвивається на основі відчуттів, сприйняття і уявлень, що виникають в процесі життєдіяльності людини.

Але з точки зору логіки, мислення - це процес усвідомлення об'єктивного світу, який відрізняється від чуттєвого пізнання - відчуттів, сприйняття та уявлень - тим, що воно не є безпосереднім відображенням предметів і явищ, але є логічним ступенем пізнання, процесом в ході якого розкриваються і відображаються т.. властивості предметів і явищ, які органами чуття безпосередньо не сприймаються. В процесі мислительної діяльності виділяються певні властивості предмета, який відображається в мозку, і встановлюються відповідні зв'язки і відношення з іншими властивостями і предметами з метою отримання нових знань. Таким чином, традиційна логіка трактує мислення як процес, в ході якого людина співставляє думки про предмет чи явище, з одних думок виводить інші, в яких містяться нові знання, ставить перед собою завдання і дає відповіді на них, висуває гіпотези, будує доведення, створює наукові теорії. Процес мислення здійснюється з допомогою знаків, слів, речень, які є чуттєвою матеріальною оболонкою наших думок, тобто з допомогою мови, усного чи письмового мовлення.

Як показують спостереження, часто вчителі, на жаль, не приділяють належної уваги розвитку в учнів математичного мовлення, не дбають про культуру їх мислення і вдовольняються лише тим, що учні правильно виконують обчислення, або в кращому разі розв'яжуть задачу за зразком чи аналогією. Однак останнє не є показником високого рівня розвитку теоретичного і абстрактного мислення учнів, його гнучкості і не свідчить про усвідомлене засвоєння ними математичних знань. На наш погляд, свідомого засвоєння учнями математичних знань можна добитись, якщо вчитель сам добре володіє знанням не лише математики, але й психології та логіки, тобто не лише розкриває зміст математичних понять та законів, але й навчає співставляти різні положення, аналізувати їх, узагальнювати, виводити з одних положень інші, самостійно відкривати нові математичні істини. Зауважимо, що вчителі іноді надто захоплюються проведенням самостійних робіт і практикують їх навіть тоді, коли не до кінця розкрита суть питання, що, закономірно, викликає ряд труднощів у виконанні їх учнями. Тому дуже важливо вчителю вміло застосовувати логічні прийоми та логічні дії в процесі научування школярів і керівництва їх навчальною діяльністю. Логічний прийом - це спосіб мислительної діяльності, який дає можливість приходити до нового, більш глибокого і всебічного знання на основі відповідної обробки уже наявних суджень і понять, суть якої полягає в співставленні, розчленуванні, об'єднанні, доведенні тощо. Логічними прийомами є аналіз, синтез, порівняння, абстрагування, узагальнення, класифікація, систематизація. Психологи називають ці прийоми мислительними операціями.

Логічна дія - це мислительний процес, в результаті якого з наявних думок отримується нова думка. Думки про предмет матеріалізуються у вигляді речень, які в логіці називаються судженнями. Ланцюжок взаємопов'язаних суджень, які стосуються певного питання чи теми, об'єкта чи явища, і викладені в строгій логічній послідовності так, що із попередніх суджень обов'язково випливають інші, внаслідок чого отримуємо відповідь на поставлене питання, називається міркуванням. Наприклад, співставивши дві думки: „Діагоналі рівнобедреної трапеції рівні" і „Дана трапеція - рівнобедрена", дістаємо нову думку: „Діагоналі даної трапеції рівні". Така логічна дія називається дедуктивним міркуванням або умовиводом. Як правило, під час навчання математики мислительний процес має характер дедуктивного міркування, яке називають просто міркуванням. Тому завдання вчителя полягає в тому, щоб навчити учнів правильно міркувати. Міркування вважається правильним, якщо з правильних суджень, які є умовами, отримують правильний висновок, тобто нове правильне судження.

Судження, як логічне поняття, - це форма думки, в якій щось стверджується або заперечується відносно предметів і явищ, їх властивостей, зв'язків та відношень і яка може бути істинною або хибною. Наприклад: „Паралелограм є многокутником" або „число 12 - парне". Ці речення є судженнями. Та частина думки, яка відображає предмет думки, називається суб'єктом судження і позначається латинською літерою S (від лат. Subjectum), а та частина судження, в якій відображається те, що стверджується або заперечується про предмет думки, називається предикатом судження і позначається латинською літерою P (від лат. Praedicatum). Якщо мова йде про предмети, то слово „є", яке зв'язує суб'єкт і предикат, називається зв'язкою. Зв'язку часто опускають. Наприклад: „Число 20 - кругле". Символічно судження записується в логіці так: S є (не є) P, де S і P - змінні, замість яких можна підставити певні думки про предмети і їх властивості, а зв'язка „є" стала. Судження, записане цією формулою, виражає зв'язки між предметами. Наприклад: „Квадрат є прямокутником". Якщо судження відображає відношення між предметами, то його записують формулою a R b, де a і b-змінні, замість яких можна підставити певні думки про предмети, а R- змінна, замість якої можна підставити певну думку про вид відношення. Наприклад: a || b, a⊥ b, a>b, де в перших двох прикладах букви a і b позначають прямі, а в третьому прикладі a та b числа.

Судження вважається істинним, якщо в ньому мислено зв'язане те, що зв'язане насправді в науці чи в реальному світі, бо істина - це відповідність думки предметові, який відображається нашим мисленням. Судження вважається хибним, якщо в ньому мислено зв'язується те, що насправді незв'язане в матеріальному світі, або ж коли в ньому роз'єднується те, що в дійсності зв'язане, тобто коли судження не відповідає предмету, який відображається в ньому. Отже, в судженні відображається об'єктивний зв'язок між предметом і його властивостями. Існують різні класифікації суджень залежно від обсягу та змісту понять, які відображені в судженні, а також залежно від характеру зв'язку предметів і властивостей.

Стверджувальна або заперечувальна форма судження називається якістю судження. Судження, в якому відображається наявність певної ознаки у предмета, називається стверджувальним судженням. Наприклад: „Кути при основі рівнобедреного трикутника рівні" - стверджувальне судження. Судження, в якому відображається відсутність деякої ознаки у предмета, називається заперечувальним судженням. Наприклад: „Прямокутний трикутник не є рівностороннім". Таким чином якість судження - де є відображення наявності чи відсутності певної властивості у предмета. А тому перша класифікація суджень за якістю відображених предметів охоплює два класи - стверджувальні і заперечувальні судження. Оскільки в судженні не лише відображається наявність чи відсутність у предметів певної ознаки чи ряду ознак, але й фіксується, чи дана ознака притаманна одному предмету, кільком предметам деякого класу, чи всім предметам цього класу, то існує інша класифікація суджень - за кількістю. Кількістю судження називають обсяг предметів, відображених в судженні. За обсягом або кількістю предметів, відображених в судженнях, останні поділяються на одиничні, часткові і загальні. Наприклад:

1. „Число 15 кратне трьом" - одиничне судження, бо думка, відображена в ньому, стосується одного числа - 15.

2. „Деякі парні числа кратні трьом" - часткове судження, бо думка, висловлена в ньому, стосується не одного, і не всіх парних чисел, оскільки серед останніх можуть бути і не кратні трьом, а лише деяких.

3. „Всі ромби - паралелограми" - загальне судження, оскільки не існує ромба, який не був би паралелограмом.

Отже, судження називається одиничним, якщо в ньому щось стверджується або заперечується про окремий предмет. Перехід від пізнання властивостей одного предмета певного класу до встановлення того, що ця властивість притаманна всім предметам цього класу, здійснюється, як правило, через виявлення наявності чи відсутності цієї властивості у частини предметів даного класу. Судження, у якому щось стверджується чи заперечується про частину предметів певного класу, називається частковим судженням. Наприклад: „Деякі ромби є прямокутниками", або „Деякі прямокутники є квадратами".

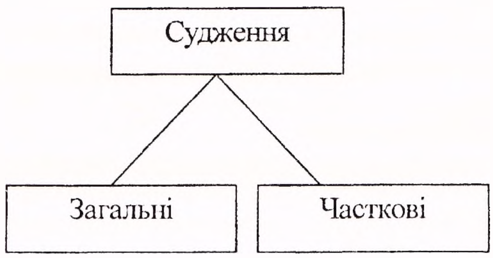
Абстрагуючись від конкретного змісту даних часткових суджень, легко встановити, що структура таких суджень виражається формулою: „Деякі S є (або не є) P". Часткові судження поділяються на два види: 1) визначені і 2) невизначені.

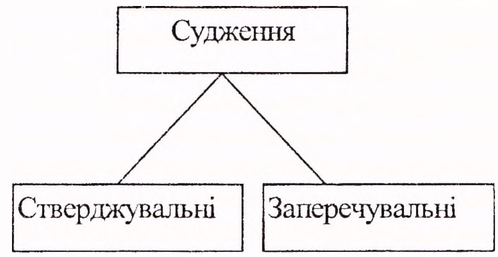
1). Часткове судження, в якому щось стверджується чи заперечується про деяку певну частину предметів вказаного класу, називається визначеним частковим судженням. Структура його виражається формулою: „Тільки деякі S (а можливо і всі) є (або не є) P.

2). Часткове судження, в якому щось стверджується чи заперечується про деяку частину предметів певного класу і нічого не стверджується і не заперечується відносно решти предметів цього класу, називається невизначеним частковим судженням. Його структура має вид: „Принаймні деякі S (а можливо і всі) є (або не є) P". Наприклад: „Принаймні деякі прості числа є непарними". Часткове судження розкриває зв'язок властивості з кількома деякими предметами. Але воно криє в собі певну невизначеність, коли потрібно встановити наявність чи відсутність даної властивості у всіх предметів класу, оскільки невідомо, яка частина класу володіє даною властивістю.

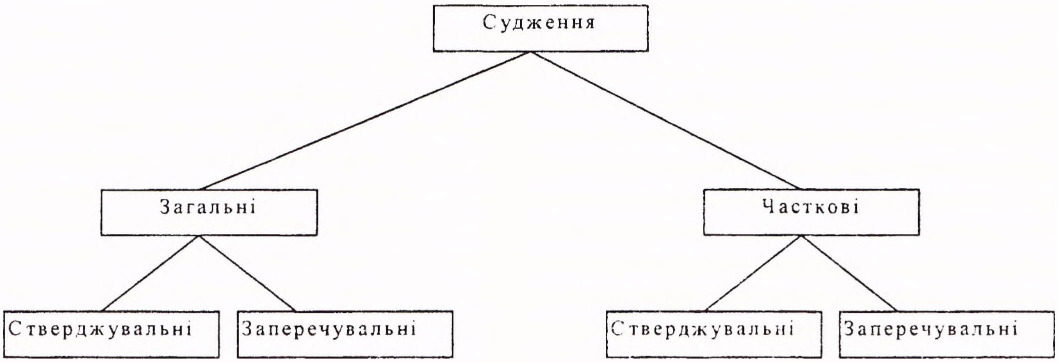
Судження, в якому щось стверджується або заперечується про кожний предмет певного класу, тобто про всі предмети певного класу, називається загальним судженням. Структура його виражається такими формулами: „Всі S є P" або „Жодне S не є P". Наприклад:

„Всі ромби є паралелограмами“, „Жодний рівносторонній трикутник не є прямокутним“. Отже, загальне судження відображає зв'язок кожного предмета певного класу з тією чи іншою властивістю, притаманною даному класу, тобто означає, що названа властивість поширюється на всі предмети даного класу. Розглянуті дві класифікації суджень за кількістю та якістю можна проілюструвати схемами:





Об'єднавши їх, дістанемо класифікацію суджень за основою кон'юнктивної структури (за двома ознаками одночасно), яку можна проілюструвати схемою:



В результаті цієї класифікації утворилося чотири види суджень: загальностверджувальні, загальнозаперечувальні, частковостверджувальні, частковозаперечувальні. Їх позначають певними літерами латинського алфавіту:

A - загальностверджувальні (перша голосна літера латинського слова affirmo - стверджую);

E - загальнозаперечувальні (перша голосна літера латинського слова nego- заперечую);

I - частковостверджувальні (друга голосна літера латинського слова affirmo),

O - частковозаперечувальні (друга голосна літера латинського слова nego).

Крім цього, всі судження поділяються на умовні, роздільні і категоричні, а також на судження можливості, дійсності і необхідності.

Між судженнями існують відношення суперечливості або протиріччя, протилежності і підпорядкованості. Два судження, з яких одне заперечує те саме, про що одночасно стверджується у другому судженні про той самий предмет, називаються суперечливими. Наприклад: „Це число - парне“ і „Це число - непарне“. Зрозуміло, що суперечливі судження перебувають у відношенні неузгодженості. Але відношення неузгодженості виявляється і в іншій формі. Наприклад: „Цей чотирикутник - не квадрат“ і ,‘ Цей чотирикутник - трапеція“. В цьому випадку друге судження заперечує перше судження, але, на відміну від суперечливих суджень, друге судження не обмежується лише запереченням першого, але й одночасно стверджує щось інше, тобто з нього дізнаємося, що цей чотирикутник справді не квадрат, але й одночасно стало відомо, що він є трапецією. Такі пари суджень називаються протилежними. Протилежні судження відрізняються від суперечливих такою суттєвою ознакою: якщо між суперечливими судженнями не може бути третього, то між протилежними судженнями можливі проміжні судження.

Відношення підпорядкованості між судженнями - це відношення між загальностверджувальними та частковостверджувальними судженнями, які стосуються одних і тих самих предметів та властивостей. Наприклад, судження „Деякі ромби - паралелограми“ підпорядковане судженню „Всі ромби - паралелограми“. Відношення підпорядкованості суджень задовольняє таким правилам:

1. З істинності загального судження випливає істинність підпорядкованого йому часткового судження. Наприклад, судження „Деякі квадрати мають рівні діагоналі“ істинне, бо істинне судження „Всі квадрати мають рівні діагоналі“.

2. З хибності часткового судження слідує хибність

відповідного загального судження. Наприклад, з того, що судження „Деякі круглі числа - прості" - хибне, слідує, що й хибне судження „Всі круглі числа - прості".

3. З істинності часткового судження не обов'язково слідує істинність відповідного загального судження. Наприклад, судження „Деякі непарні числа - прості" - істинне, але судження ,' Всі непарні числа - прості" - хибне.

4. З хибності загального судження не обов'язково випливає хибність чи істинність часткового судження. Наприклад, загальне судження „Всі чотирикутники мають перпендикулярні діагоналі" - хибне, але часткове судження „Деякі чотирикутники мають перпендикулярні діагоналі" - істинне. В іншому випадку загальне судження „Всі трапеції є паралелограмами" - хибне, і часткове судження „Деякі трапеції є паралелограмами" - також хибне.

Тому в процесі навчання математики вчитель повинен звертати увагу учнів на особливості висловлюваних ними суджень, на зв'язки і відношення між ними, формувати в них вміння проводити міркування шляхом висловлювання різних суджень, які характеризують різні властивості предметів чи явищ, співставляти ці судження і встановлювати їх суперечливість, протилежність чи підпорядкованість, виділяти спільні властивості класу чи його частини, на основі чого навчати їх робити узагальнення і формулювати висновки про притаманність ознаки одиничним чи усім предметам класу. Вчителю слід добитися від учнів уміння проводити міркування за такими найпоширенішими формами, які завжди приводять до правильних висновків. Ці форми міркувань називають правилами <u>висновку</u>, <u>заперечення</u> і <u>силогізму</u>.

<u>Правило висновку</u> виражає структуру міркування, в якому перша умова є загальностверджувальне судження „Всі S є P", друга умова - одиничне стверджувальне судження, яке стосується одного об`єкта α з класу S, або властивості S, а висновком є одиничне стверджувальне судження, яке стосується того самого об'єкта α який характеризується властивістю P (об'єктів класу P).

Наприклад: Всі круглі числа - парні.
<u>Число 20 - кругле.</u>
Число 20 - парне.

Правило висновку можна прочитати в імплікативній формі з допомогою слів „якщо..., то...". В розглянутому вище прикладі міркування проговорюють так: „Якщо число кругле, то воно - парне. Число 20 - кругле. З цього слідує, що число 20 - парне". В символах логіки його можна записати так:

$(\forall x \in N)[S(x) \Rightarrow P(x)] \wedge S(20) \Rightarrow P(20)$, де символ □ - квантор загальності, запис (□x є N) означає „всі числа x з множини N - натуральних чисел; S(x) - „число x кругле"; P(x) - „число x - парне"; Λ- читається „і"; символ ⇒ читається „якщо..., то..." або „слідує". Правило висновку можна записати ще й так:

$(\forall x \in M)[S(x) \Rightarrow P(x)$ $S(a)$ ---------- $P(a)$	В цьому записі M - область визначення предикатів S(x) та P(x), елемент α - певний елемент множини M.

<u>Правило заперечення</u> виражає структуру міркування, в якому перша умова - загальностверджувальне судження "Всі S є P", друга умова - одиничне заперечувальне судження, яке стосується деякого об'єкта α, що характеризується відсутністю властивості P, а висновком є одиничне заперечувальне судження, яке стосується об`єкта α, якому не притаманна і властивість S. В загальному вигляді в символах логіки це міркування можна записати так:
$(\forall x \in M)[S(x) \Rightarrow P(x)] \wedge P(a) \Rightarrow S(a)$або так:$(\forall \in M)[S(x) \Rightarrow P(x)]$
<u>$P(a)$</u>
$S(a)$

Наприклад: Якщо число кратне 4, то воно парне.
<u>Число 27 - непарне</u>
Число 27 - не кратне 4.

<u>Правило силогізму</u> виражає міркування, в якому кожна з двох умов є загальностверджувальне судження, причому предикат другої умови є суб'єктом першої умови, а висновком міркування є також загальностверджувальне судження, в якому суб`єктом є суб`єкт другої умови, а предикатом є предикат першої умови. Структура цього міркування має вигляд:

Всі S є P або $(\forall \in X)[S(x) \Rightarrow P(x)]$
<u>Всі M є S</u> <u>$(\forall x \in X)[M(x) \Rightarrow S(x)]$</u>
Всі M є P $(\forall x \in X)[M(x) \Rightarrow P(x)]$

Тут, як і вище, горизонтальною рискою відокремлено умови від висновку. Наведемо приклад міркування, що має форму силогізму:

Всі паралелограми - многокутники.
<u>Всі ромби - паралелограми.</u>
Всі ромби - многокутники.

Відзначимо, що наведені символічні записи - конструкції міркувань - не слід пропонувати школярам. Їх наводимо тут для того, щоб вчитель сам швидше орієнтувався у формах цих міркувань. А учням розкриваємо сутність правильного міркування на конкретних прикладах шляхом словесних, мовленнєвих пояснень. Розглянуті нами вище форми (структури) міркувань не вичерпують всіх видів міркувань. (Адже силогізмів у логіці розглядають 19). Однак навіть лише ті, які розкриті тут, при вмілому використанні їх учителями дозволять піднятися учням на одну сходинку вище в розвитку мислительної математичної культури.